TENTAMEN 18/12 2008

SF1622/5B1142

ENVARIABELANALYS & LINJÄR ALGEBRA

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + xe^x}{3x} \overset{*/}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} + \lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} \frac{\sin 2x}{2x} + \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} e^x = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x \text{ i första termen.} \\ t \to 0 \Leftrightarrow x \to 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}}_{\substack{=1 \\ \text{(std. gr. vä)}}} + \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x \to 0} e^x}_{=1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{1}}$$

*/ $\lim (f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$ om de två gränsvärdena i H.L. existerar.

- Uppgiften kan lösas även med MacLaurinutveckling eller m.h.a l'Hospitals regel.

<u>SVAR:</u> 1

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

(2) Eftersom $(\ln x)^2$ och x båda är > 0 för $x > 0$ gäller att sökta arean ges av

$$A = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ u = \ln x & u(1) = 0 \\ du = \frac{1}{x}\,dx & u(e) = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^1 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Svar: $\frac{1}{3}$ a.e.

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

3

$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ har riktningsvektor

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Låt S beteckna planet genom $(5, 6, 0)$ ortogonalt mot L.

$S \perp L \iff S \perp \bar{v} \iff \bar{v}$ är normalvektor till S

Punkt-normal ekvation för S blir

$$4(x-5) + 2(y-6) + 1(z-0) = 0$$

$$\iff 4x + 2y + z = 32$$

En punkt på L som också tillhör S ges av t s.a.

$$4(2+4t) + 2(2t) + (3+t) = 32$$

$$\iff 8 + 16t + 4t + 3 + t = 32$$

$$\iff 21t = 21 \iff t = 1$$

som motsvarar skärningspunkt

$$(x, y, z) = (2, 0, 3) + 1 \cdot (4, 2, 1) = (6, 2, 4)$$

<u>SVAR:</u> $(6, 2, 4)$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

(4) $f(x) = 3\sqrt{x} - x^{3/2}$

- $f(x)$ är <u>kontinuerlig</u> på det <u>slutna</u> intervallet $[0,4] \Rightarrow f$ antar största resp. minsta värde.

Detta sker i ändpunkter, kritiska pkter eller singulära punkter.

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$$

- f deriverbar på $(0,4)$, inga singulära punkter

- $f' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$, enda kritiska pkt.

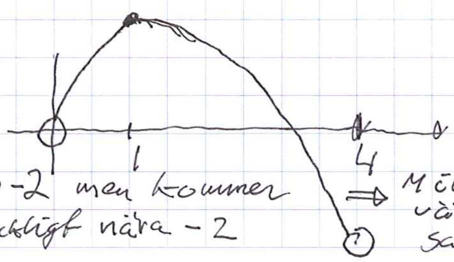
Vi jämför värden:

$f(0) = 0 \qquad f(1) = 2 \qquad f(4) = 3\cdot 2 - 4^{3/2} = -2$

<u>Delsvar</u>: $\Rightarrow$ $\boxed{f(1) = 2 \text{ största värde, } f(4) = -2 \text{ minsta värde på } [0,4]}$

- På det öppna intervallet $(0,4)$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot \begin{cases} > 0 & 0 < x < 1 \Rightarrow f \text{ växande} \\ < 0 & 1 < x < 4 \Rightarrow f \text{ avtagande} \end{cases}$$

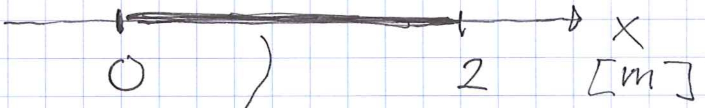


$f(x) > -2$ men kommer godtyckligt nära -2 $\Rightarrow$ Minsta värde saknas

$\Rightarrow$ <u>Delsvar</u>: $f(1) = 2$ är största värde på $(0,4)$. Minsta värde saknas

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

5.



Densitet: $\rho(x) = \dfrac{10}{4+x^2}$ [g/m]

Massan av ett litet element dx: $dm = \rho(x)\,dx$

Totala massan $m = \int_0^2 dm = \int_0^2 \rho(x)\,dx$

$$= \int_0^2 \frac{10}{4+x^2}\,dx = \frac{10}{4}\int_0^2 \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \left\{\begin{array}{ll} \text{substitution} & \\ u = \frac{x}{2} & u(0)=0 \\ du = \frac{1}{2}dx & u(2)=1 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{5}{2}\cdot 2\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = 5\Big[\arctan u\Big]_0^1$$

$$= 5\,(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{5\pi}{4}$$

Svar: Tråden väger $\frac{5\pi}{4}$ gram

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

utv = längs 4:e kolonn

$$= \underbrace{(-1)^{1+4}}_{-1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Bryt ut } (-1) \\ \text{ur rad 2 och 3} \end{matrix} \right\}$$

$$= (-1)\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

utv. = längs rad 3

$$= - \underbrace{(-1)^{3+3}}_{1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(0-(-4)) = -4$$

SVAR: -4

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

7 $y(x) = (Ax+B)e^{3x} + \sin x$ = allmän lösning till 2:a ordningens linjär ODE.

En sådan lösning är av formen

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ där

$y_h(x)$ är allmän lösning till motsv. homogena ekvation; y_h innehåller 2 st. integrationskonstanter och $y_p(x)$ är en partikulärlösning.

Vi känner igen $y_h(x) = (Ax+B)e^{3x}$ som allmän homogen lösning till den diff.-ekv. som har karaktäristisk ekvation med dubbel rot $r = 3$, $(r-3)^2 = 0$

~~or~~ $r^2 - 6r + 9 = 0$ som motsv. den homogena ekvationen $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Om nu $y_p = \sin x$ är en partikulärlösning gäller att $y_p' = \cos x$, $y_p'' = -\sin x$ och

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = -\sin x - 6\cos x + 9\sin x$$
$$= 8\sin x - 6\cos x$$

<u>SVAR:</u> $y'' - 6y' + 9y = 8\sin x - 6\cos x$

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

8. Vi vill partialbråksuppdela $R(x)$, och börjar därför med att faktorisera nämnaren $N(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Man ser att $x = 1$ är ett nollställe till $N(x)$

$\Longrightarrow (x-1)$ är en faktor. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 1 \\ \hline x-1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ & -(x^3 - x^2) \\ \hline & 0 + x - 1 \\ & -(x-1) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow N(x) = (x-1)(x^2+1)$

kan ej faktoriseras i reella 1:a gradsfaktorer.

Vi gör ansatsen

$$R(x) = \frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} \overset{\text{ANSATS}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Identifikation av koefficienter ger

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x: \\ \text{konst}: \end{array} \begin{cases} A + B = 5 \\ -B + C = 1 \\ A - C = 2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) 1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & +5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) -1/2 \quad -1/2 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} A = 4 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases}$$

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

8 forts

Alltså är $R(x) = \frac{4}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+1}$

och $\int R(x)\,dx = \int \frac{4}{x-1}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx$

$= \int \frac{4}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$

$= 4\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C_1$

<u>SVAR:</u> $4\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C_1$

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

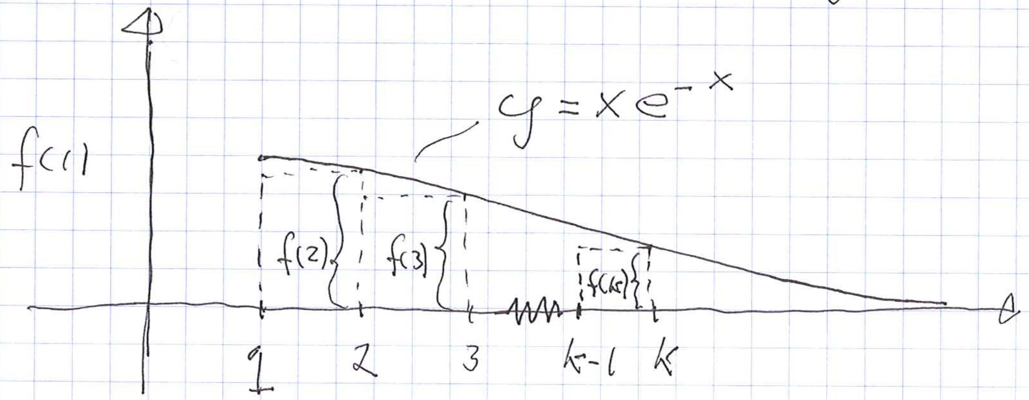
(9.) Sätt $f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$

Då är $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$\Longrightarrow$ $f'(x)<0$ för $x>1 \Rightarrow f(x)$ strängt avtagande på $[1,\infty)$

Vidare gäller att $f(x)$ är kontinuerlig (ty f är en elementär funktion) och $f(x)>0$ för $x \geq 1$ (ty $x>0$ och $e^x>0$).

Betrakta följande figur:



Vi får $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}=\frac{1}{e}+\sum_{n=2}^{\infty}ne^{-n}=\frac{1}{e}+\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$

$\underset{\text{FIGUR}}{\overset{\text{ENLIGT}}{\leq}} \frac{1}{e}+\int_1^{\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{e}+\int_1^{\infty}xe^{-x}\,dx=\begin{bmatrix} U=x & V=-e^{-x}\\ dU=dx & dV=e^{-x}dx\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{e}+\left[-xe^{-x}\right]_1^{\infty}+\int_1^{\infty}e^{-x}dx=\frac{1}{e}+\lim_{X\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_1^{X}+\left[-e^{-x}\right]_1^{X}\right)$

$=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}-\underbrace{\lim_{X\to\infty}xe^{-x}}_{=0}+\frac{1}{e}-\underbrace{\lim_{X\to\infty}e^{-x}}_{=0}=\frac{3}{e}$ V.S.B.

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

(10) $f(x)$ kan approximeras med linjär funktion $L(x)=ax+b$ när $x \to \infty$ om $y=L(x)$ är sned asymptot till $y=f(x)$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}}$$

$$f(x) = \frac{7x^2-3x+2+\arctan x}{x} = (7x-3) + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{\to 0}.$$

då $x \to +\infty$

dvs $L(x) = 7x-3$ är en sned asymptot till $y=f(x)$, och därmed den linjära funktion som lektor Bergthun har i åtanke.

Approximationsfel

$$= |f(x)-L(x)| = \left|(7x-3)+\frac{2}{x}+\frac{\arctan x}{x}-(7x-3)\right|$$

$$= \left|\frac{2}{x}+\frac{\arctan x}{x}\right| \le \left|\frac{2}{x}\right| + \left|\frac{\arctan x}{x}\right|$$

$$\underset{x>100}{\overset{\text{om}}{<}} \left\{ \begin{matrix} 0<\arctan x<\frac{\pi}{2} \\ \text{för } x>0 \end{matrix} \right\} < \frac{2}{100} + \frac{\pi/2}{100} < \left\{\frac{\pi}{2}<2\right\}$$

$$< \frac{2}{100} + \frac{2}{100} = \frac{4}{100}.$$

SVAR: Han har rätt!