KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 22/4 2009 kl 14-19
SF1622/5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 motsvaras av de tre lappskrivningarna; den som är godkänd på lappskrivning n erhåller automatiskt full poäng på uppgift nr n, och skall alltså inte lösa denna uppgift vid tentamenstillfället.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C alt. 4, 5) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter. Under kursens gång har funnits möjlighet att erhålla maximalt 3 bonuspoäng till del II. Dessa utfaller först då godkänt resultat redan har uppnåtts.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- A och 5: 35 poäng, varav minst 12 poäng från del II.
- B och 4: 28 poäng, varav minst 8 poäng från del II.
- C och 4: 22 poäng, varav minst 4 poäng från del II.
- D och 3: 18 poäng
- E och 3: 16 poäng.
- Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E): 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del I

(1) För vilka x gäller det att $e^x \geq 1 + x$?

(2) Beräkna

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx.$$

(3) Bestäm arean av den triangel som har sina hörn i punkterna $(1, 2, 3)$, $(4, 2, 1)$och $(3, 0, 2)$. Ange också ekvationen för den linje som passerar genom hörnet $(1, 2, 3)$ och är vinkelrät mot triangeln. (ON-system)

(4) Man vill tillverka en burk med given volym i form av ett rätblock med kvadratisk bottenyta och utan lock. Hur skall burken dimensioneras för att materialåtgången skall bli så liten som möjligt?

(5) a) Ge exempel på en funktion $g(x)$ som uppfyller olikheten

$$\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| < \int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

b) Beskriv de kontinuerliga funktioner som uppfyller olikheten i a).

(6) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y-z+w=0 \\ x+3y+z-w=0 \\ x-5y+2z+w=0 \end{cases}$$

Del II

(7) Bestäm ett närmevärde till $\cos(1/10)$ med hjälp av andra ordningens MacLaurinutveckling av $\cos x$, och visa att approximationsfelet R uppfyller $0 \leq R \leq 10^{-5}$.

(8) En behållare fylls med vatten uppvärmt till 50°C och placeras i ett rum där luften håller en konstant temperatur om 20°C. Förändringen av vattentemperaturen per tidsenhet antas vara proportionell mot skillnaden mellan vattentemperatur och rumstemperatur.
a) Härled utifrån detta en differentialekvation för vattentemperaturen som funktion av tiden.
b) Efter 10 minuter uppmäts vattentemperaturen till 40°C. Vilken temperatur har vattnet ytterligare 10 minuter senare?

(9) Låt $F(x) = \int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt$, $x \geq 0$. Skissera grafen $y = F(x)$. Ange var $F(x)$ är växande respektive avtagande och var grafen är konvex respektive konkav. Ange också alla eventuella asymptoter.

(10) Bestäm koordinaterna för den punkt i planet $2x - 2y - z = 4$ som ligger närmast punkten med koordinater $(2, 3, 3)$. (ON-system)