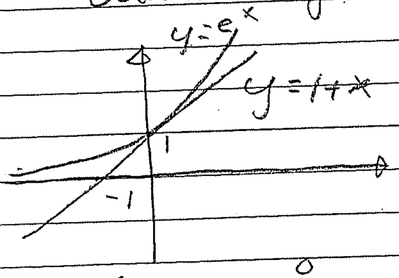
TENTAMEN SF1622 22/4 2009
SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG.

(1) En skiss av funktionsgraferna $y=e^x$ och $y=1+x$ antyder att olikheten gäller för alla $x\in\mathbb{R}$.



Vi visar detta genom att visa att $f(x)=e^x-1-x\geq 0, \ \forall x$.

$f(0)=e^0-1=0$

$f'(x)=e^x-1$ så $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

dvs $x=0$ är enda kritiska punkt.

Eftersom $e^x \begin{cases} >1 & x>0 \\ =1 & x=0 \\ <1 & x<0 \end{cases}$ får vi följande tabell

		0	x
$f'(x)$	$- - -$	0	$+ + +$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

dvs $f(0)=0$ är globalt minimum till $f(x) \Rightarrow f(x)\geq 0 \ \forall x$

$\Rightarrow \boxed{e^x \geq 1+x \text{ för alla reella tal } x}$

(2)

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \left\{\begin{matrix} u=x+1 & u(0)=1 \\ du=dx & u(1)=2 \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_1^2 (u-1)u^{1/2}\,du = \int_1^2 u^{3/2}-u^{1/2}\,du$$

$$= \left[\frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}2^{5/2}-\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2}\right)-\left(\frac{2}{5}\cdot 1^{5/2}-\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}\right)$$

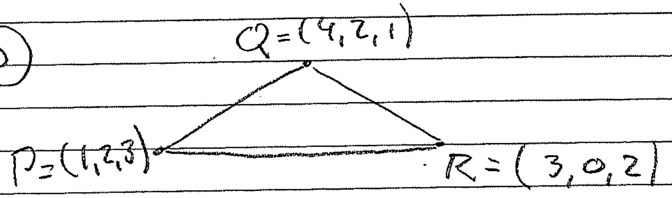
$$= \left(\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{15}-\left(-\frac{4}{15}\right)=\frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

SVAR: $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$

P.S. Det finns minst tre sätt till att beräkna denna integral

(3)



Låt $\bar{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

$\bar{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Då gäller att $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} \perp \Delta PQR$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-4,-1,-6)$$

$$\text{Arean}(\Delta PQR) = \frac{1}{2}\,\text{Arean}(\text{parallellogram } \bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}|\bar{n}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16+1+36} = \frac{1}{2}\sqrt{53}$$

Den sökta linjen $\perp \Delta PQR$ har $\bar{n}$ som en riktningsvektor.

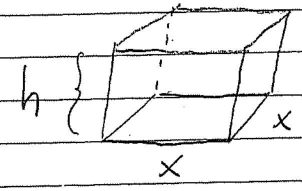
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-1\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$$

Svar: Triangelns area är $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ a.e.

Den sökta linjen ges av

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$$

(4)



V_0 = given volym

$\Rightarrow V_0 = x^2 h$ (beteckning enl. figur)

$\Rightarrow h = V_0/x^2$

Begränsningsytornas totala area A ges av

$$A = \underbrace{x^2}_{\text{bottenytan}} + \underbrace{4xh}_{\text{4 sidoytor}} = x^2 + 4x\,V_0/x^2 = x^2 + \frac{4V_0}{x}$$

Vi vill minimera A.

· x kan anta alla värden $0 < x < \infty$

När $x \to 0$ eller $x \to +\infty$ så $A(x) \to +\infty$ så minsta värde antas i en kritisk punkt.

$$A'(x) = 2x - \frac{4V_0}{x^2}.$$

$$A'(x) = 0 \iff 2x = \frac{4V_0}{x^2} \iff x^3 = 2V_0$$

$$\iff x = \sqrt[3]{2V_0}$$

Denna krit. pkt. måste vara det x-värde som minimerar $A(x)$.

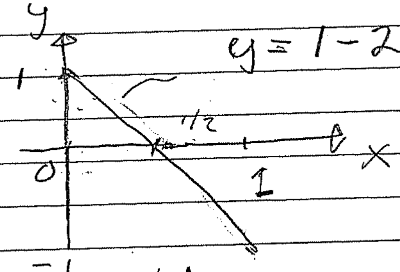
Motsvarande h ges av

$$h = \frac{V_0}{x^2} = \frac{V_0}{2^{2/3}V_0^{2/3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2V_0}.$$

Svar: Höjden h och bottenytans sidlängd x skall uppfylla $h = \frac{x}{2}$

5 a)

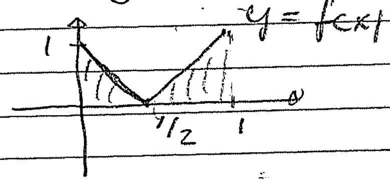
$y = 1 - 2x = g(x)$



$$\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 1-2x\,dx\right| = |0| = 0$$

$$\int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 |1-2x|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

där $f(x)$ är:



b)

En kontinuerlig funktion $g(x)$ uppfyller

$$\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| < \int_0^1 |g(x)|\,dx$$

om och endast om $g(x)$ växlar tecken på intervallet $[0,1]$

5 b) forts

Om $g(x) \geq 0$ på $[0,1]$ gäller att $\int_0^1 g(x)\,dx \geq 0 \Longrightarrow$

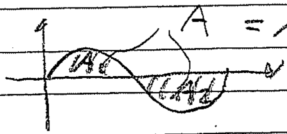
$$\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 |g(x)|\,dx$$

Om $g(x) \leq 0$ på $[0,1]$ gäller att $\int_0^1 g(x)\,dx \leq 0 \Rightarrow$

$$\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| = -\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 -g(x)\,dx = \int_0^1 |g(x)|\,dx$$

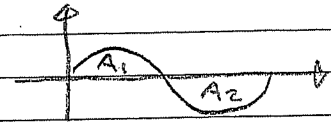
Antag nu att $g(x)$ växlar tecken på $[0,1]$

$A = \int_0^1 |g(x)|\,dx$ = Arean av området begränsat av $y = g(x)$ och x-axeln



$A = A_1 + A_2$

Men $\int_0^1 g(x)\,dx$ = (Arean mellan $y=g(x)$ och $y=0$ där $g(x) > 0$) − (Arean mellan $y=g(x)$ och $y=0$ där $g(x) < 0$)



$A_1 - A_2$

av detta följer att $\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| < \int_0^1 |g(x)|\,dx$ om g växlar tecken på $[0,1]$.

6

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ x + 3y + z - w = 0 \\ x - 5y + 2z + w = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (1/2) \\ (1/3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} -3y + w = 0 \\ x + 2y = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

$y = t$ ger parameterlösning

SVAR: $\boxed{\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2t \\ w = 3t \end{cases}}$

7

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = -1$

$f^{(3)}(x) = \sin x$ $\qquad f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\qquad f^{(4)}(c) = \cos c$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R(x) \quad \text{där} \quad R(x) = \frac{\cos(c)}{4!} x^4$$

för något c mellan 0 och x.

2:a ordningens MacLaurin approximationen till $\cos(1/10)$ ges av

$$f(\tfrac{1}{10}) \approx 1 - \frac{(1/10)^2}{2} = 1 - \frac{1}{200} = 1 - 0.005$$
$$= 0.995$$

Vi uppskattar felet R

(eftersom Maclaurinutvecklingen saknar x^3 term kan vi uppskatta felet vid andra ordningens approximation med samma term som formellt hör till 3:e ordningens approximation)

$$R(\tfrac{1}{10}) = \frac{\cos(c)}{4!} (1/10)^4, \qquad 0 \le c \le 1/10$$

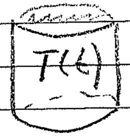
Eftersom $\cos c > 0$ för $0 \le c \le 1/10$, och $\cos c \le$ fås

$$0 \le R(1/10) \le \frac{1}{24} \cdot 10^{-4} < \frac{1}{10} 10^{-4} = 10^{-5}$$

SVAR: $\cos 1/10 = 0.995 + R$

$0 \le R \le 10^{-5}$

(8)



$T_{luft} = 20^\circ C$ (konstant)

$T(0) = 50^\circ C$

$T(10) = 40^\circ C$

a) Låt $\Delta T = T(t+\Delta t) - T(t)$

Enligt antagande gäller att

$$\Delta T = k(T_{luft} - T(t))\Delta t$$

dvs $\Delta T = k(20-T)\Delta t$

$\Longrightarrow \dfrac{\Delta T}{\Delta t} = k(20-T)$ för varje kort tidsintervall Δt

När $\Delta t \to 0$ fås $\dfrac{dT}{dt} = k(20-T)$.

b) $\dfrac{dT}{dt} = k(20-T) \Longleftrightarrow \dfrac{dT}{dt} + kT = k20$

$\Longleftrightarrow e^{kt}\dfrac{dT}{dt} + ke^{kt}T = 20ke^{kt} \Longleftrightarrow$

$\dfrac{d}{dt}\left(e^{kt}T\right) = 20ke^{kt} \Longleftrightarrow$

$e^{kt}T = 20\int ke^{kt} = 20e^{kt} + C'$

$\Longrightarrow T(t) = 20 + C'e^{-kt}$

$T(0)=50 \Longrightarrow 20 + C'e^{0} = 50 \Longrightarrow C' = 30$

dvs $T(t) = 20 + 30e^{-kt}$

(8) (forts.) Vi bestämmer k m.h.a. $T(10) = 40$:

$20 + 30e^{-10k} = 40 \Longleftrightarrow e^{-10k} = \frac{2}{3}$

$\Longleftrightarrow 10k = \ln\frac{3}{2} \Longleftrightarrow k = \frac{1}{10}\ln\frac{3}{2}$

Vi får

$$T(20) = 20 + 30e^{-20\cdot\frac{1}{10}\ln\frac{3}{2}}$$

$$= 20 + 30e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$$

$$= 20 + 30\cdot\frac{4}{9} = \frac{100}{3}$$

SVAR: a) $\dfrac{dT}{dt} = k(20-T)$

b) $T(20) = \frac{100}{3}\,^\circ C \approx 33^\circ C$

(9) $F(x)=\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt \quad , x \geq 0$

• $F'(x)=e^{-\sqrt{x}}$ (huvudsatsen)

så $F'(x)>0 \quad \forall\, x>0$

$\Rightarrow F(x)$ växande

• $F''(x)=\frac{d}{dx}\left(e^{-\sqrt{x}}\right)=\left(e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)<0, \quad x>0$

$\Rightarrow F(x)$ konkav $\quad x>0$

$F(0)=\int_0^0 \dots = 0$

$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt$ beräknas

$$\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt = \left\{\begin{array}{ll} u=\sqrt{t} & u(0)=0 \\ u^2=t & u(x)=\sqrt{x} \\ 2u\,du=dt & \end{array}\right\}$$

$$=2\int_0^{\sqrt{x}} u e^{-u}\,du = \left\{\begin{array}{ll} U=u & V=-e^{-u} \\ dU=du & dV=e^{-u}du \end{array}\right\}$$

$$=2\left[-ue^{-u}\right]_0^{\sqrt{x}}+2\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u}\,du = 2\left[-ue^{-u}-e^{-u}\right]_0^{\sqrt{x}}$$

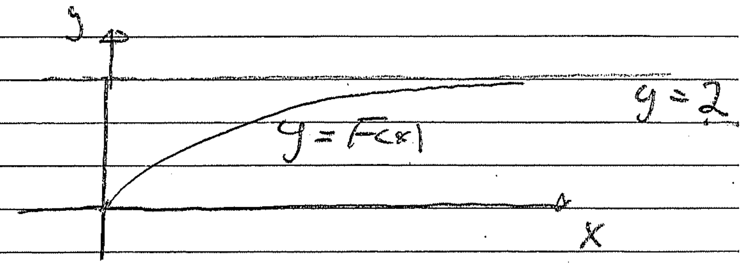
$$=2-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}-2e^{-\sqrt{x}}$$

så $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}-2e^{-\sqrt{x}}\right) = \{z=\sqrt{x}\}$

$$=2-2\underbrace{\lim_{z\to\infty} ze^{-z}}_{=0}-2\underbrace{\lim_{z\to\infty} e^{-z}}_{=0}=\underline{\underline{2}}$$

(9) forts.

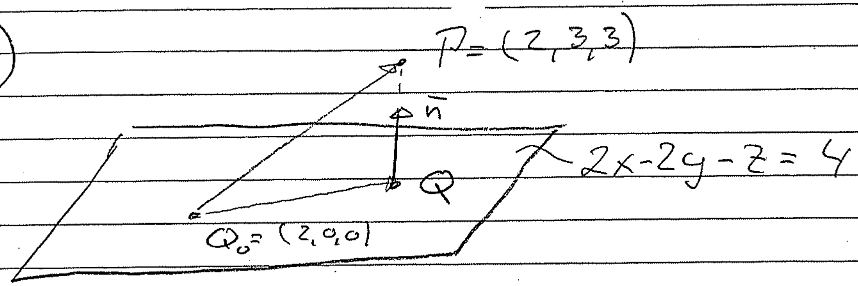
SVAR:



• $F(x)$ är växande och konkav på $x \geq 0$

• $y=2$ är horisontell asymptot då $x \to +\infty$

10.



Låt Q vara den punkt i planet som ligger närmast P $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ}$ är $\perp$ planet

Tag en punkt i planet, t.ex $Q_0=(2,0,0)$

Då fås $\overrightarrow{QP} = \text{proj}_{\bar{n}} \overrightarrow{Q_0P}$, $\overrightarrow{Q_0P}=(0,3,3)$

där $\bar{n}=(2,-2,-1)$ är normal till planet

$$\Rightarrow \overrightarrow{QP} = \frac{\bar{n}\cdot \overrightarrow{Q_0P}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\,\bar{n} = \frac{(2,-2,-1)\cdot(0,3,3)}{4+4+1}(2,-2,-1)$$

$$= \frac{-9}{9}(2,-2,-1) = -(2,-2,-1)$$

Ortsvektorn för Q fås som

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{QP} =$$

$$= (2,3,3)+(2,-2,-1) = (4,1,2)$$

SVAR: (4,1,2) är den punkt i planet som ligger närmast (2,3,3)