Institutionen för matematik, **KTH**
A. Sola

SF1624 Algebra och Geometri för M1:
Kontrollskrivning 1A
10 september 2008, kl.10.15-11.00
Lösningar

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Minst 5 poäng krävs för godkänt.

Observera att svaren **skall** motiveras. Inga hjälpmedel är tillåtna på skrivningen.

1. Lös ekvationen

$$z^2 + (1+i)z + i = 0.$$

Lösning Vi börjar med att kvadratkomplettera uttrycket i vänsterledet:

$$\begin{aligned} z^2 + (1+i)z + i &= z^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(1+i)z + i \\ &= \left(z + \frac{1}{2}(1+i)\right)^2 - \frac{i}{2} + i = \left(z + \frac{1}{2}(1+i)\right)^2 + \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Den ursprungliga ekvationen kan alltså skrivas

$$\left(z + \frac{1}{2}(1+i)\right)^2 = -\frac{i}{2},$$

eller, om vi sätter $w = z + (1+i)/2$,

$$w^2 = -\frac{i}{2}. \tag{1}$$

Vi ansätter nu $w = x + iy$ och räknar ut

$$w^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy \tag{2}$$

Vi har att bestämma x och y så att realdelarna och imaginärdelarna i (1) är lika. Vi sätter in (2) i (1) och får ekvationerna

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Var god vänd!

Vi får en tredje ekvation för x och y genom att ta absolutbelopp i (1):

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

Genom att addera de kvadratiska ekvationerna får vi att $2x^2 = 1/4$, vilket ger oss $x = \pm 1/2$. Från relationen $2xy = -1/2$ följer därefter $y = \mp 1/2$, och vi erhåller två lösningar till (1):

$$w_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \quad \text{och} \quad w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Eftersom $z = w - (1+i)/2$ får vi till slut

$$z_1 = -i \quad \text{och} \quad z_2 = -1.$$

2. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) = \frac{n^3 - n}{3} \quad \text{för} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Lösning Vi börjar med att behandla basfallet $n = 1$. Vänsterledet är då

$$1^2 - 1 = 0,$$

medan högerledet är

$$\frac{1^3 - 1}{3} = 0.$$

Påståendet är därmed sant i basfallet.

Vi antar nu att

$$\sum_{k=1}^{N} (k^2 - k) = \frac{N^3 - N}{3}$$

är sant för något N och vi ska visa att

$$\sum_{k=1}^{N+1} (k^2 - k) = \frac{(N+1)^3 - (N+1)}{3} \tag{3}$$

följer. Vänsterledet i (3) kan skrivas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} (k^2 - k) + (N+1)^2 - (N+1) &= \sum_{k=1}^{N} (k^2 - k) + N^2 + 2N + 1 - N - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{N} (k^2 - k) + N^2 + N \end{aligned}$$

Vi ersätter summan med $(N^3 - N)/3$ i enlighet med vårt induktionsantagande och får att vänsterledet i (3) är lika med

$$\frac{N^3 - N}{3} + N^2 + N = \frac{N^3 - N + 3N^2 + 3N}{3} = \frac{N^3 + 3N^2 + 3N + 1 - N - 1}{3}.$$

Efter en omskrivning ser vi att uttrycket i högerledet är lika med $((N+1)^3 - (N+1))/3$, vilket skulle visas. Induktionsaxiomet ger oss nu att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

3. Betrakta de två vektorerna i rummet som i en ON-bas har framställningarna

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Ange två vektorer i rummet som är vinkelräta mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

Lösning Vi drar oss till minnes att vinkeln θ mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ kan beräknas med hjälp av skalärprodukten enligt

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}. \tag{4}$$

Vi ser genast att $|\mathbf{v}| = 1$ och vi beräknar därefter

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Skalärprodukten av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

och vi får nu

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi drar härur slutsatsen att $\theta = \pi/4$.

Man kan hitta vektorer som är vinkelräta mot $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ genom att bilda kryssprodukten, men man kan också notera att båda de givna vektorerna saknar nollskilda komponenter i $\mathbf{e_1}$-led. Detta betyder att skalärprodukten

Var god vänd!

mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ och varje vektor som *enbart* har en nollskild komponent i denna riktning är noll. Vi kan alltså välja

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

för $a, b \in \mathbb{R}$ som vinkelräta vektorer.