KTH Matematik
A. Sola

SF1624 Algebra och Geometri för M1: Kontrollskrivning 2B
24 september 2008, kl.10.15-11.00
Lösningar

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Minst 5 poäng krävs för godkänt.

Observera att svaren **skall** motiveras. Inga hjälpmedel är tillåtna på skrivningen.

1. Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$, skilda från nollvektorn.

- När är $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ *parallella*?
- När är $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ *ortogonala*?

Ge ett exempel på två vektorer i $\mathbb{R}^4$ som är parallella, och ge ett exempel på två vektorer i $\mathbb{R}^5$ som är ortogonala.

Lösning Parallellitet och ortogonalitet diskuteras i kursboken på s.116-118, och där finns även definitioner av dessa begrepp.

Vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

utgör ett exempel på parallella vektorer i $\mathbb{R}^4$, medan

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är två vektorer i $\mathbb{R}^5$ som är ortogonala.

Var god vänd!

2. Beräkna determinanten av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning Vi ser att första raden i matrisen ovan innehåller en etta och fyra nollor, och vi väljer därför att utveckla efter rad nummer ett.

Den enda nollskilda termen i utvecklingen blir

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

och den resulterande 3×3-determinanten kan beräknas med Sarrus regel. Vi väljer istället att utveckla efter kolonn nummer ett. Återigen är bara en term nollskild, nämligen

$$1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Vi har

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2,$$

och vi får till slut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

3. Bestäm samtliga lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}.$$

Lösning Vi observerar att första raden och andra raden i ekvationssystemet är multiplar av varandra. Detta innebär att vi får en nollrad, och därmed ett underbestämt system. Lösningarna till systemet kommer således att ges på parameterform.

Låt oss nu bestämma lösningarna genom att betrakta de två kvarstående ekvationerna

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}.$$

Vi sätter $y = s$ för $s \in \mathbb{R}$. Den andra ekvationen medför nu att

$$x = -4 + y = -4 + s.$$

Vi har alltså $x = -4 + s$ och $y = s$, och genom insättning i första ekvationen erhåller vi

$$z = 1 - x - y = 1 + 4 - s - s = 5 - 2s.$$

Lösningarna till det givna ekvationssystemet ges alltså av

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lycka till!