KTH Matematik
A. Sola

SF1624 Algebra och Geometri för M1:
Kontrollskrivning 3B
Lösningar
13 oktober 2008, kl.10.15-11.00

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Minst 5 poäng krävs för godkänt.

Observera att svaren **skall** motiveras. Inga hjälpmedel är tillåtna på skrivningen.

1. Låt A vara en $n \times n$-matris. Ange vad som menas med att vektorn $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ är en egenvektor till A med egenvärde λ.

Visa också att om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ så är $t\mathbf{v}$ en egenvektor till A med samma egenvärde λ för varje nollskilt reellt tal t.

Lösning Vektorn $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ om $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Om $t \neq 0$ är ett reellt tal sätter vi $\mathbf{w} = t\mathbf{v}$. Räknereglerna för matriser och vektorer samt faktumet att $\mathbf{v}$ är en egenvektor ger oss

$$A\mathbf{w} = A(t\mathbf{v}) = t(A\mathbf{v}) = t(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(t\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w}.$$

Eftersom $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ visar detta att $\mathbf{w}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ. Alltså är $t\mathbf{v}$ en egenvektor till A för varje $t \neq 0$.

2. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösning Vi börjar med att bestämma egenvärdena till B genom att bestämma rötterna till den karakteristiska ekvationen $\det(B - \lambda I) = 0$. Karakteristiska ekvationen får i det aktuella fallet utseendet

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 12 \\ 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda) = 0,$$

Var god vänd!

och vi får de två egenvärdena $\lambda_1 = -4$ och $\lambda_2 = 2$.

Vi bestämmer nu egenvektorerna som hör till λ_1. Vi söker alltså vektorer $\mathbf{v}$ som löser

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi noterar att detta är ett underbestämt system. Vi sätter därför $v_2 = t$ och får från första ekvationen att $v_1 = -2t$. Alltså är egenvektorerna hörande till $\lambda_1 = -4$ på formen

$$\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nu söker vi egenvektorerna som hör till egenvärdet $\lambda_2 = 2$. I detta fall löser en egenvektor $\mathbf{w}$ ekvationen

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta medför att $w_2 = 0$ medan w_1 kan väljas godtyckligt. Egenvektorerna hörande till $\lambda_2 = 2$ ges således av

$$\mathbf{w} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

3. Är matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm C^{-1} om så är fallet.

Lösning Vi drar oss till minnes att en matris C är inverterbar om och endast om $\det C \neq 0$. Vi ser genast att första och tredje kolonnen i matrisen C är lika, och detta betyder att C har determinant lika med 0. Således följer det att C saknar invers.

En alternativ lösning på uppgiften är att ställa upp det utökade systemet för beräkning av inversa matrisen. Man får efter elementära radoperationer en nollrad i högerledet, och detta visar att matrisen saknar invers.

Lycka till!