KTH, Matematik, Serguei Shimorin

5B1146, Geometri och algebra för E1
Modelltentamen: lösningsförslag

1. Vi visar först basfallet $n = 1$.

$$\text{V.L.} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}; \qquad \text{H.L.} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Stämmer!

Nu antar vi att formel gäller för något heltal n. Vi skall visa att den gäller också för nästa heltalet $n+1$. Vi har

$$\text{V.L.}(n+1) = \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \Big[\text{ enligt induktionsantagandet! }\Big] = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

och

$$\text{H.L.}(n+1) = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Det stämmer igen och detta avslutar induktionsbeviset.

2. Vi skriver först både täljare och nämnare i polär form. Vi har

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \qquad \text{och} \qquad (1+i)^{21} = (\sqrt{2})^{21}e^{i\cdot 21\pi/4}.$$

Därefter,

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \qquad \text{och} \qquad (1-i)^{17} = (\sqrt{2})^{17}e^{-i\cdot 17\pi/4}.$$

Hela bråket blir då

$$(\sqrt{2})^{21-17}e^{i\cdot 21\pi/4 + i\cdot 17\pi/4} = 4e^{i\cdot 38\pi/4} = 4(\cos(38\pi/4) + i\sin(38\pi/4)) =$$

$$= 4(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)) = -4i.$$

3. Vi väljer först två godtyckliga punkter på linjen. T ex valet $t = 0$ ger oss punkten $B : (2, -2, 3)$ och valet $t = -2$ ger oss punkten $C : (0, -2, 1)$. Problemet nu är att bestämma planet som går genom tre givna punkter: B, C och $A : (1, -1, 0)$. Normalvektor till planet skall vara ortogonal mot både vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ och kan väljas då som deras kryssprodukt. Vi har $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 3)$ och $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1)$ vilket ger

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z.$$

Alltså, normalvektor är $(2,-4,-2)$ och planets ekvation är

$$2(x-1)-4(y+1)-2z=0$$

eller

$$2x-4y-2z-6=0.$$

4. Låt $A:\ (4t+3, t+4, 2)$ och $B:\ (12s+1, 6s+7, 3s+5)$ vara två godtyckliga punkter på linjerna. Då vektor $\vec{AB}$ har koordinater $(12s-4t-2, 6s-t+3, 3s+3)$. Den har minsta längden vilket stämmer med avståndet mellan linjerna om den är vinkelrät mot både vektorer $\mathbf{v}_1=(4,1,0)$ och $\mathbf{v}_2=(12,6,3)=3(4,2,1)$ längs linjerna. Vi får således systemet av ekvationer $\vec{AB}\cdot\mathbf{v}_1=0$ och $\vec{AB}\cdot\mathbf{v}_2=0$ för obekanta s och t. Systemet är

$$\begin{cases} 54s-17t=5; \\ 63s-18t=-1. \end{cases}$$

Det har lösningarna $s=-107/99$ och $t=-41/11$. Man sätter in dessa s och t till formel för $\vec{AB}$ och beräknar därefter dess längd som ger den sökta avståndet. Svaret blir

$$\frac{2\sqrt{33}}{33}.$$

(Uppgifter med sådana krångliga beräkningar kommer inte på tentan. Men uppgifter av sådan TYP kan förekomma!)

5. Matrisen av systemet är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Efter standarta radoperationer den överförs till trappstegmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2a-4 \end{array}\right).$$

Vi ser först att systemet har entydig bestämt lösningen om $a^2-a-2\neq 0$ d v s $a\neq -1$ och $a\neq 2$. I speciella fallet $a=2$ systemet blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Den sista ekvationen är $0=0$ uppfylls alltid och då man kan välja t ex variabel z fritt och uttrycka x och y i z från den första och andra ekvationer. Alltså , i fallet $a=2$ det finns oändligt många lösningar. I sista speciella fallet $a=-1$ systemet blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Den sista ekvationen är $0 = -6$. Den uppfylls alldrig och systemet saknar lösningar.

6. För att visa att vektorer utgör en bas det räcker att visa att matrisen bildad av vektorerna har determinant skild från 0. Vi räknar

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Därefter, koordinaterna av vektoren $\mathbf{v}$ är sådana tal x_1, x_2 och x_3 att $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$. För att bestämma dem, skall man lösa systemet med matris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Systemet har lösningen $x_1 = -4/5$, $x_2 = -9/5$, $x_3 = 7/5$.

7. Låt A vara matrisen av avbildningen. Då det gäller att

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tillsammans de två samband kan skrivas som $AB = C$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså $A = CB^{-1}$. För B^{-1} får man

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

och $\det B = 3$. Äntligen, matrismultiplikationen ger

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Uttrycket är en kvadratisk form med matris

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma dess positiv/negativ definit egenskaperna, skall man veta egenvärdna till matrisen. Vi räknar det karakteristiska polynomet:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{/summerar tredje och andra rader /} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{/utveckling längs sista raden /} = (4-\lambda)\left[(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}\right] =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 2).$$

Rötterna till karakteristiska ekvationen är

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}.$$

Två första är positiva medan den tredje är negativ, vilket visar att kvadratiska formen är ej definit och den kan anta både positiva och negativa värdena.

9. Vi börjar med egenvärdena:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -6 \\ 1 & 8-\lambda & -8 \\ 1 & 5 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \text{/subtraherar den andra raden från den tredje /} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -6 \\ 1 & 8-\lambda & -8 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 3)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -6 \\ 1 & 8-\lambda & -8 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(-\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Egenvärdena är

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 3.$$

Nu söker man motsvarande egenvektorer.

För första egenvärdet $\lambda_1 = 1$ den första egenvektor $\mathbf{v}_1$ är lösningen till homogena systemet med matris

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & -8 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

.

Analogt bestämmer man två andra egenvektorerna:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad \text{och} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t.$$

Alltså, får man diagonalmatris

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

och överföringsmatris

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Enligt spektralsats finns det en ON bas av egenvektorer till matrisen A : $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. För första egenvektor $\mathbf{v}_1$ det gäller att $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, där λ_1 är antingen 1 eller -1. I både fall blir då $A^{2006}\mathbf{v}_1 = \lambda_1^{2006}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$. Samma samband gäller också för alla andra egenvektorer vilket visar att A är enhetsmatris.