KTH, Matematik, Serguei Shimorin

5B1146, Geometri och algebra för E1
Modelltentamen

Inga hjälpmedel tillåtna. Betygsgränserna är: 16p ger betyg 3, 22p ger betyg 4 och 30p ger betyg 5.

Lycka till!

1 (3p). Visa med hjälp av induktion att

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

2 (3p). Bestäm algebraisk formen av komplexa talet

$$\frac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{17}},$$

d v s ange det på form $a+ib$ med reella a och b.

3 (3p). Bestäm ekvationen för planet som går genom punkten $(1,-1,0)$ och genom räta linjen med parametriska ekvationen

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t+2\\ -2\\ t+3\end{pmatrix}.$$

4 (4p). Bestäm avståndet mellan linjerna l_1 och l_2 i rummet där

$$l_1:\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4t+3\\ t+4\\ 2\end{pmatrix}\qquad\text{och}\qquad l_2:\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12s+1\\ 6s+7\\ 3s+5\end{pmatrix}.$$

5(4p). För vilka värde av parametern a har systemet

$$\begin{cases} x+ay+2z=-1\\ y+az=2\\ x+y=-3\end{cases}$$

en entydig lösning; inga lösningar; oändligt många lösningar?

6 (4p). Visa att vektorerna

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix};\ \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

utgör en bas i rummet $\mathbb{R}^3$. Bestäm även koordinaterna av vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i denna bas.

7 (3p). T är en linjär avbildning i planet $\mathbb{R}^2$ sådan att $T\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ och $T\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$, där

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm standardmatrisen för T.

8 (3p). Kan uttrycket

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$$

anta negativa värdena?

9 (4p). Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & 8 & -8 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

d v s ange en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

10 (4p). En symmetrisk $n \times n$ matris A har egenvärdena 1 och -1 och inga fler egenvärden. Bevisa att A^{2006} är enhetsmatris.