Avsnitt 4, Matriser

W214 Beräkna AB då

a) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, och

b) $\quad A = \begin{pmatrix} \text{-1} & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & \text{-1} \\ \text{-1} & \text{-3} \end{pmatrix}$.

Först måste vi försäkra oss om att matrismultiplikationen verkligen går att utföra. För att det ska gå måste antalet kolumner i den första matrisen vara lika med antalet rader i den andra matrisen. Om vi skriver matrisernas storlekar under matriserna i produkten,

$$\underset{2\times \underbrace{2\quad 2}}{A}\underset{\times 2}{B}$$

så ska alltså de inre indexen vara lika, vilket de är i detta fall. Produktmatrisen kommer har samma storlek som de yttre indexen

$$\underset{\underbrace{2\times 2\quad 2\times 2}}{A\qquad B}$$

d.v.s. 2×2.

a) Matrismultiplikationen går till som så att rader i den första matrisen multipliceras med kolumner i den andra matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$(1,1)$-elementet i produktmatrisen är produkten av rad 1 och kolumn 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 8 + 2\cdot 6 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

De övriga elementen får vi genom att multiplicera ihop raden som har sammar radnummer som elementet med kolumnen som har samma kolumnnummer som elementet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 1\cdot 7 + 2\cdot 5 \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 3\cdot 8 + 4\cdot 6 & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 48 & 3\cdot 7 + 4\cdot 5 \end{pmatrix}$$

Alltså är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 48 & 41 \end{pmatrix}.$$

c) Matrisprodukten räknar vi ut på samma sätt som i a-uppgiften

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 4 + 3\cdot(-1) & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & (-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-3) \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5\cdot 4 + 2\cdot(-1) & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 18 & 5\cdot(-1) + 2\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$$

W215

a) Beräkna $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Visa att för matriserna $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ och $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ är endast den ena av de båda möjliga produkterna definierade. Beräkna denna.

a) Den vänstra matrisen har storleken 1×3 och den högra 3×2. Matrismultiplikationen är alltså möjlig eftersom antal rader i den vänstra matrisen är lika med antal kolumner i den högra matrisen. De inre indexen

$$1 \times \underbrace{3 \quad 3} \times 2$$

överensstämmer. Produkten har samma storlek som de yttre indexen

$$\underbrace{1 \times 3 \quad 3 \times 2}$$

d.v.s. 1×2. Vi får produktmatrisen genom att multiplicera raden med kolumnerna,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) & \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A har storleken 2×3 och matrisen B har storleken 1×2. Detta gör att produkten

$$\underset{2\times 3}{A}\ \underset{1\times 2}{B} \quad \text{inte är möjlig,}$$
$$\underbrace{3 \quad 1}_{\neq}$$

medan

$$\underset{1\times 2}{B}\ \underset{2\times 3}{A} \quad \text{är möjlig.}$$
$$\underbrace{2 \quad 2}_{=}$$

Produkten får vi som vanligt genom att multiplicera rader med kolumner,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

W217 Beräkna AB då

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

b) $A = B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Eftersom båda matriserna är 3×3 är deras produkt definierad. Vi får produkten genom att multiplicera rader med kolumner,

a)
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 5 \\ (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) & (-2) \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 5 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & 18 & 29 \\ 6 & -12 & -6 \\ -14 & 27 & 20 \end{pmatrix},$$

d)

$$\begin{pmatrix}2&-3&1\\-4&5&3\\-1&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&1\\-4&5&3\\-1&4&-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\cdot2+(-3)\cdot(-4)+1\cdot(-1) & 2\cdot(-3)+(-3)\cdot5+1\cdot4 & 2\cdot1+(-3)\cdot3+1\cdot(-2)\\ (-4)\cdot2+5\cdot(-4)+3\cdot(-1) & (-4)\cdot(-3)+5\cdot5+3\cdot4 & (-4)\cdot1+5\cdot3+3\cdot(-2)\\ (-1)\cdot2+4\cdot(-4)+(-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot(-3)+4\cdot5+(-2)\cdot4 & (-1)\cdot1+4\cdot3+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15&-17&-9\\-31&49&5\\-16&15&15\end{pmatrix}.$$

W218a Beräkna AB och BA då

$$A = \begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&5\\6&1&7\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-5&2\\-8&-2&1\end{pmatrix}.$$

Vi får

$$AB = \begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&5\\6&1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-5&2\\-8&-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot3+2\cdot(-8) & 1\cdot0+3\cdot(-5)+2\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+3\cdot2+2\cdot1\\ 2\cdot2+0\cdot3+5\cdot(-8) & 2\cdot0+0\cdot(-5)+5\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+0\cdot2+5\cdot1\\ 6\cdot2+1\cdot3+7\cdot(-8) & 6\cdot0+1\cdot(-5)+7\cdot(-2) & 6\cdot(-1)+1\cdot2+7\cdot1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-5&-19&7\\-36&-10&3\\-41&-19&3\end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-5&2\\-8&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&5\\6&1&7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot6 & 2\cdot3+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 2\cdot2+0\cdot5+(-1)\cdot7\\ 3\cdot1+(-5)\cdot2+2\cdot6 & 3\cdot3+(-5)\cdot0+2\cdot1 & 3\cdot2+(-5)\cdot5+2\cdot7\\ -8\cdot1+(-2)\cdot2+1\cdot6 & (-8)\cdot3+(-2)\cdot0+1\cdot1 & (-8)\cdot2+(-2)\cdot5+1\cdot7\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-4&5&-3\\5&11&-5\\-6&-23&-19\end{pmatrix}.$$

Notera att $AB \neq BA$. Den kommutativa lagen gäller inte för matrismultiplikation.

W220 Beräkna för matriserna

$$A = \begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix}-1&5\\3&-2\end{pmatrix}$$

a) $A^2 = AA$,

b) $B^2 = BB$,

c) $(A+B)^2$,

d) $A^2 + 2AB + B^2$, och

e) $A^2 + AB + BA + B^2$.

f) Jämför resultaten i c-, d- och e-uppgiften.

Matrismultiplikation ger

a) $$A^2 = AA = \begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\cdot3+1\cdot(-2) & 3\cdot1+1\cdot4\\ (-2)\cdot3+4\cdot(-2) & (-2)\cdot1+4\cdot4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&7\\-14&14\end{pmatrix},$$

b) $$B^2 = BB = \begin{pmatrix}-1&5\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&5\\3&-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+5\cdot3 & (-1)\cdot5+5\cdot(-2)\\ 3\cdot(-1)+(-2)\cdot3 & 3\cdot5+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16&-15\\-9&19\end{pmatrix},$$

c) $$(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)^2$$
$$= \begin{pmatrix} 3-2 & 1+5 \\ -2+3 & 4-2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+6\cdot 1 & 2\cdot 6+6\cdot 2 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 6+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vi har att

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+1\cdot 3 & 3\cdot 5+1\cdot(-2) \\ (-2)\cdot(-1)+4\cdot 3 & (-2)\cdot 5+4\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 14 & -18 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3+5\cdot(-2) & (-1)\cdot 1+5\cdot 4 \\ 3\cdot 3+(-2)\cdot(-2) & 3\cdot 1+(-2)\cdot 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -13 & 19 \\ 13 & -5 \end{pmatrix},$$

och då är

d) $$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 14 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & -15 \\ -9 & 19 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7+2\cdot 0+16 & 7+2\cdot 13-15 \\ -14+2\cdot 14-9 & 14-2\cdot 18+19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$
$$A^2+AB+BA+B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 14 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 & 19 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 16 & -15 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+0-13+16 & 7+13+19-15 \\ -14+14+13-9 & 14-18-5+19 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

f) Från c- och d-uppgiften ser vi att

$$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2,$$

d.v.s. den vanliga kvadreringsregeln gäller inte, utan kvadreringsregeln för matriser blir

$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2,$$

just p.g.a. att $AB \neq BA$ i allmänhet.

W221a Beräkna AB och BA då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A har storleken 3×2 och B är 2×3. Produkten AB,

$$\underbrace{\underset{3\times 2}{A}\quad\underset{2\times 3}{B}}$$

har därför storleken 3×3. Matrisen BA,

$$\underbrace{\underset{2\times 3}{B}\quad\underset{3\times 2}{A}}$$

får storleken 2×2. Rader multiplicerat med kolumner ger

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 0+(-2)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-4)\cdot 1 & 2\cdot(-1)+(-4)\cdot 1 & 2\cdot 0+(-4)\cdot 1 \\ (-3)\cdot 2+6\cdot 1 & (-3)\cdot(-1)+6\cdot 1 & (-3)\cdot 0+6\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+0\cdot(-3) & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+0\cdot 6 \\ 1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot(-3) & 1\cdot(-2)+1\cdot(-4)+1\cdot 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W223 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna var för sig matriserna $(AB)C$ och $A(BC)$.

Vi har

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot 2 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \\ 0\cdot 4 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
(AB)C &= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8\cdot 1 + 5\cdot 2 & 8\cdot 0 + 5\cdot 3 \\ 20\cdot 1 + 13\cdot 2 & 20\cdot 0 + 13\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \\
BC &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 3\cdot 2 & 4\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \\
A(BC) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 10 + 2\cdot 4 & 1\cdot 9 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 10 + 4\cdot 4 & 3\cdot 9 + 4\cdot 3 \\ 0\cdot 10 + 1\cdot 3 & 0\cdot 9 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi ser alltså att $(AB)C = A(BC)$. Denna likhet gäller i allmänhet och kallas för den associativa lagen.

W225 Visa att för matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gäller $AX = XA = E$, där E är enhetsmatrisen av ordning 2.

Matrismultiplikation ger

$$\begin{aligned}
AX &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot \frac{1}{3} + 2\cdot (-\frac{1}{4}) & 1\cdot (-1) + 2\cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot \frac{3}{2} + 3\cdot (-\frac{1}{4}) & \frac{1}{2}\cdot (-1) + 3\cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

vilket visar att $AX = XA = E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Matriserna A och X är alltså varandras inverser.

W227b Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ har inversen $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Matrisen B är en invers till A om den uppfyller

$$AB = BA = E. \tag{$*$}$$

Vi undersöker om detta är uppfyllt,

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 & -2\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot 2 & -2\cdot 4 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 7\cdot 2 + (-8)\cdot 1 + (-2)\cdot 3 & 7\cdot 3 + (-8)\cdot 2 + (-2)\cdot 2 & 7\cdot 4 + (-8)\cdot 3 + (-2)\cdot 2 \\ (-4)\cdot 2 + 5\cdot 1 + 1\cdot 3 & (-4)\cdot 3 + 5\cdot 2 + 1\cdot 2 & (-4)\cdot 4 + 5\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+3\cdot 7+4\cdot(-4) & 2\cdot 2+3\cdot(-8)+4\cdot 5 & 2\cdot 1+3\cdot(-2)+4\cdot 1 \\ 1\cdot(-2)+2\cdot 7+3\cdot(-4) & 1\cdot 2+2\cdot(-8)+3\cdot 5 & 1\cdot 1+2\cdot(-2)+3\cdot 1 \\ 3\cdot(-2)+2\cdot 7+2\cdot(-4) & 3\cdot 2+2\cdot(-8)+2\cdot 5 & 3\cdot 1+2\cdot(-2)+2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså har vi visat att B uppfyller $(*)$, varför B är A^{-1}.

W231 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös med hjälp av resultaten i uppgift 227 matrisekvationerna

c) $BY = A$, och

d) $YB = A$.

c) Genom att vänstermultiplicera båda led med B^{-1} fås

$$B^{-1}BY = B^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad EY = B^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad Y = B^{-1}A.$$

I uppgift 227a visas att inversen till matrisen B är

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 3+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 4+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 2 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2 & -\frac{1}{2}\cdot 4+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

d) Vi högermultiplicerar båda led med B^{-1}

$$YBB^{-1} = AB^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad YE = AB^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad Y = AB^{-1},$$

vilket ger

$$Y = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 2\cdot(-1)+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 2\cdot(-1)+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2} \\ 1\cdot 2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2} \\ 3\cdot 2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 3\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 3\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

W232 Beräkna $(AB)^t$, A^tB^t och B^tA^t, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

När vi transponerar en matris blir raderna i ursprungsmatrisen kolumner i den transponerade matrisen,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned} A^tB^t &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 4+3\cdot 0 & 1\cdot 5+3\cdot(-1) \\ 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 4+1\cdot 0 & 2\cdot 5+1\cdot(-1) \\ 4\cdot 2+0\cdot 1 & 4\cdot 4+0\cdot 0 & 4\cdot 5+0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 9 \\ 8 & 16 & 20 \end{pmatrix}, \\ B^tA^t &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 4 & 2\cdot 3+4\cdot 1+5\cdot 0 \\ 1\cdot 1+0\cdot 2+(-1)\cdot 4 & 1\cdot 3+0\cdot 1+(-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Med transponeringsreglerna har vi att

$$(AB)^t = B^tA^t = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

W315 Beräkna, då matriserna A och B är givna enligt nedan, dels matriserna AB och BA, dels var för sig talen $\det(AB)$, $\det(BA)$ och $(\det A)\cdot(\det B)$, samt kontrollera att dessa är lika.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Vi börjar med att bestämma matrisprodukterna,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot 2 \\ (-3)\cdot 4+4\cdot 1 & (-3)\cdot 3+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\cdot 1+3\cdot(-3) & 4\cdot 2+3\cdot 4 \\ 1\cdot 1+2\cdot(-3) & 1\cdot 2+2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 20 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Determinanterna blir

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = 6\cdot(-1) - 7\cdot(-8) = 50, \\ \det(BA) &= \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = (-5)\cdot 10 - 20\cdot(-5) = 50, \\ \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot(-3) = 10, \\ \det B &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 3\cdot 1 = 5, \\ (\det A)&\cdot(\det B) = 10\cdot 5 = 50. \end{aligned}$$

Nu ser vi att $\det(AB) = \det(BA) = (\det A)\cdot(\det B)$.

b) Matrisprodukterna blir

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 0 + 2\cdot 3 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix.} \\
&\qquad \begin{matrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 2\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot(-2) \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{matrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 3 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1 & 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 & 3\cdot(-2) + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 0 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} 2\cdot 2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi ska beräkna determinanterna med tre olika metoder.

Metod 1 (Sarrus regel)

När vi beräknar en determinant med Sarrus regel tar vi de två första kolumnerna och placerar kopior av dessa till höger om determinanten. Determinantens värde får vi sedan genom att lägga ihop högerdiagonalprodukterna och dra ifrån vänsterdiagonalprodukterna,

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 8 & 4 & 1 & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -10 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ - & - & -\ + & + & + \end{array} \\
&= 8\cdot(-1)\cdot(-1) + 4\cdot(-10)\cdot 5 + 1\cdot 6\cdot 1 - 5\cdot(-1)\cdot 1 \\
&\quad - 1\cdot(-10)\cdot 8 - (-1)\cdot 6\cdot 4 \\
&= 8 - 200 + 6 + 5 + 80 + 24 = -77,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(BA) &= \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 3 & -4 & 5 & 3 & -4 \\ -2 & -3 & -4 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 & 1 & -3 \\ - & - & -\ + & + & + \end{array} \\
&= 3\cdot(-3)\cdot 6 + (-4)\cdot(-4)\cdot 1 + 5\cdot(-2)\cdot(-3) - 1\cdot(-3)\cdot 5 \\
&\quad - (-3)\cdot(-4)\cdot 3 - 6\cdot(-2)\cdot(-4) \\
&= -54 + 16 + 30 + 15 - 36 - 48 = -77,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ - & - & -\ + & + & + \end{array} \\
&= 1\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot 2 - 0\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot(-2) \\
&= 3 - 4 + 0 - 6 - 0 - 0 = -7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ - & - & -\ + & + & + \end{array} \\
&= 2\cdot(-1)\cdot(-2) + 0\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot(-1)\cdot 1 \\
&\quad - 1\cdot(-2)\cdot 2 - (-2)\cdot 0\cdot 0 \\
&= 4 + 0 + 0 + 3 + 4 - 0 = 11, \\
\bigl(\det A\bigr)&\cdot\bigl(\det B\bigr) = (-7)\cdot 11 = -77.
\end{aligned}
$$

Alltså har vi visat att $\det(AB) = \det(BA) = \bigl(\det A\bigr)\cdot\bigl(\det B\bigr)$.

Observera att Sarrus regel gäller endast för 3×3-determinanter.

Metod 2 (Kofaktorutveckling)

Vi kan välja att kofaktorutveckla en determinant längs en rad eller en kolumn i determinanten.

Om vi börjar med determinanten

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

så väljer vi först en rad eller en kolumn, t.ex. den andra kolumnen. Varje element i kolumn 2 ger upphov till en minorterm i utvecklingen.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot \bigl(6 \cdot (-1) - (-1) \cdot 5\bigr) + (-1) \cdot \bigl(8 \cdot (-1) - 1 \cdot 5\bigr) \\ &\quad - 1 \cdot \bigl(8 \cdot (-10) - 1 \cdot 6\bigr) \\ &= -4 \cdot 44 + (-1) \cdot (-13) - 1 \cdot (-86) = -77. \end{aligned}$$

Tecknet framför varje term får vi från tecken-matrisen

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix},$$

och minorerna är de determinanter som uppstår när vi stryker den rad och den kolumn som motsvarande element ingår i.

De andra determinanterna räknar vi ut på motsvarande sätt genom att välja en rad eller en kolumn att utveckla längs. Räkningarna blir lite enklare om man väljer en rad/kolumn med många nollor i sig.

$$\begin{aligned} \det(BA) &= \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= +1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \bigl((-4) \cdot (-4) - 5 \cdot (-3)\bigr) - (-3) \cdot \bigl(3 \cdot (-4) - 5 \cdot (-2)\bigr) \\ &\quad + 6 \cdot \bigl(3 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-2)\bigr) \\ &= 1 \cdot 31 - (-3) \cdot (-2) + 6 \cdot (-17) = -77, \\ \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \bigl(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0\bigr) - 0 \cdot \bigl(\cdots\bigr) + 1 \cdot \bigl((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 3\bigr) = -7, \\ \det B &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -0 + (-1) \cdot \bigl(2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3\bigr) - (-2) \cdot \bigl(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3\bigr) \\ &= 0 + (-1) \cdot (-7) - (-2) \cdot 2 = 11, \\ \bigl(\det A\bigr) \cdot \bigl(\det B\bigr) &= (-7) \cdot 11 = -77. \end{aligned}$$

Alltså har vi visat att $\det(AB) = \det(BA) = \bigl(\det A\bigr) \cdot \bigl(\det B\bigr)$.

Metod 3 (Radoperationer)

Med hjälp av radoperationer kan vi skriva om en determinant till en triangulär determinant vars värde är produkten av diagonalelementen. Vid varje radoperation ändras determinantens värde enligt reglerna

- $|A| = |A|$,
- $|A| = \frac{1}{a}|A \textcircled{a}|$, (där $a \neq 0$),
- $|A| = -|A|$.

Det första steget är att vi ser till att få nollor under $(1,1)$-elementet,

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\frac{6}{8} & -\frac{5}{8} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6-\frac{6}{8}\cdot 8 & -1-\frac{6}{8}\cdot 4 & -10-\frac{6}{8}\cdot 1 \\ 5-\frac{5}{8}\cdot 5 & 1-\frac{5}{8}\cdot 4 & -1-\frac{5}{8}\cdot 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{8} \end{vmatrix}.$$

Vi valde alltså att addera multiplar av första raden till rad 2 och 3 för att få nollor under $(1,1)$:an.
Sedan går vi till nästa diagonalelement $(2,2)$ och utför en radoperation för att få en nolla under elementet,

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{8} \end{vmatrix} -\tfrac{3}{8}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\cdot(-4) & -\frac{13}{8}-\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{43}{4}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & 0 & \frac{77}{32} \end{vmatrix}.$$

Vi har nu en triangulär determinant med produkten av diagonalelementen som värde,

$$= 8\cdot(-4)\cdot\frac{77}{32} = -77.$$

De andra determinanterna räknar vi ut med samma strategi,

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{17}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3\cdot 3}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -17 & -2 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix} -\tfrac{5}{17} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -17 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{231}{17} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot 3\cdot(-17)\cdot\frac{231}{17} = -77,$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} -\tfrac{2}{3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) = -7,$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} -\tfrac{3}{2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{vmatrix} +$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) = 11,$$

$$\big(\det A\big)\big(\det B\big) = -7\cdot 11 = -77.$$

Vi har alltså visat att $\det(AB) = \det(BA) = \big(\det A\big)\cdot\big(\det B\big)$.

W316 Beräkna på enklaste sätt talen $\det A^2$, $\det B^3$ och $\det(ABA)$ för matriserna A och B i uppgift

a) 315a, och

b) 315b.

Determinantreglerna ger att

$$\begin{aligned}\det A^2 &= \det(AA) = \bigl(\det A\bigr)\bigl(\det A\bigr) = \bigl(\det A\bigr)^2,\\ \det B^3 &= \det(BBB) = \bigl(\det B\bigr)\bigl(\det B\bigr)\bigl(\det B\bigr) = \bigl(\det B\bigr)^3,\\ \det(ABA) &= \det(AB)\cdot\det A.\end{aligned}$$

Från uppgift 315 har vi att

a) $\det A = 10, \quad \det B = 5, \quad \det(AB) = 50,$

b) $\det A = -7, \quad \det B = 11, \quad \det(AB) = -77.$

Alltså är

a) $\det A^2 = 10^2 = 100,\ \det B^3 = 5^3 = 125,\ \det(ABA) = 50\cdot 10 = 500,$

b) $\det A^2 = (-7)^2 = 49,\ \det B^3 = 11^3 = 1331,\ \det(ABA) = -77\cdot(-7) = 539.$

W318 Visa att följande matriser är inverterbara och bestäm inversen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}$.

En matris är inverterbar om dess determinant är skild från noll. Vi har att

a) $\begin{vmatrix} 2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 6\cdot 1 = 8 - 6 = 2 \neq 0,$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot 2 = 8 - 10 = -2 \neq 0.$

Alltså är båda matriserna inverterbara. Inversen bestämmer vi med adjunktformeln

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12}\\ -M_{21} & +M_{22}\end{pmatrix}^T,$$

där M_{11}, M_{12}, M_{21} och M_{22} är matrisens minorer,

a) $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 4, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 1,$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 6, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 2,$

b) $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 8, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 2,$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 5, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 1.$

Inversen är alltså

a) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix},$

b) $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 8 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -5\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

W320 För vilka tal k har matrisen $A + kB$ en invers, om

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Bestäm $(A + kB)^{-1}$ för dessa k.

Matrisen $A + kB$ är

$$\begin{aligned} A + kB &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + k \cdot 1 & -1 + k \cdot 3 \\ 2 + k \cdot (-1) & 1 + k \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 3k-1 \\ 2-k & k+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

och den har en invers när determinanten är skild från noll, d.v.s. när

$$\begin{aligned} \det(A + kB) &= \begin{vmatrix} k & 3k-1 \\ 2-k & k+1 \end{vmatrix} = k(k+1) - (3k-1)(2-k) \\ &= 4k^2 - 6k + 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Denna andragradare har rötterna $k = 1$ och $k = \frac{1}{2}$. Alltså är matrisen $A + kB$ inverterbar när $k \neq \frac{1}{2}$ och $k \neq 1$. Inversen ges av adjunktformeln

$$(A + kB)^{-1} = \frac{1}{\det(A + kB)} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{pmatrix}^T,$$

där

$$M_{11} = \begin{vmatrix} k & 3k-1 \\ 2-k & k+1 \end{vmatrix} = k+1, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} k & 3k-1 \\ 2-k & k+1 \end{vmatrix} = 2-k,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} k & 3k-1 \\ 2-k & k+1 \end{vmatrix} = 3k-1, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} k & 3k-1 \\ 2-k & k+1 \end{vmatrix} = k.$$

Alltså

$$(A + kB)^{-1} = \frac{1}{4k^2 - 6k + 2} \begin{pmatrix} k+1 & 1-3k \\ k-2 & k \end{pmatrix}.$$

W402 Skriv följande ekvationssystem i matrisform och lös dem sedan med hjälp av koefficientmatrisens invers:

a) $\begin{aligned} 2x + 5y &= 1, \\ x + 3y &= 0, \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 2, \\ 3x - 5y &= 6. \end{aligned}$

a) De två uttrycken i vänsterledet kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y \\ x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Elementen i matrisen är koefficienterna framför x och y. Ekvationssystemet kan alltså skrivas som matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om koefficientmatrisen är inverterbar ger vänstermultiplikation med inversen att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen är inverterbar om dess determinant är skild från noll. Vi har att

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Alltså finns inversen. Vi kan bestämma inversen med "snabbformeln": 1 delat med determinanten framför matrisen, diagonalelementen byter plats och de andra två elementen byter tecken. Alltså,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Vi får ekvationssystemet i matrisform genom att skriva om vänsterledet som en matrisprodukt,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Koefficientmatrisens determinant är

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 3 = -29 \neq 0,$$

varför matrisen är inverterbar och ekvationssystemet har lösningen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} (-5) \cdot 2 + (-3) \cdot 6 \\ (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{29} \\ -\frac{18}{29} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W407a Lös med hjälp av Cramers regel ekvationssystemet

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 4 - a, \\ (a-3)x + (a-1)y &= -1, \end{aligned}$$

för alla värden på parametern a då detta är möjligt.

Vi skriver först ekvationssystemet i matrisform,

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cramers regel kan användas när koefficientmatrisen är inverterbar, d.v.s. när determinanten

$$\begin{vmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1) - (-2)(a-3) = a^2 + a - 6$$

är skild från noll. Med andra ord, när $a \neq -3$ och $a \neq 2$ (som är determinantpolynomets rötter).

Enligt Cramers regel har ekvationssystemet lösningen

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 4-a & -2 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{(4-a)(a-1) - (-2)(-1)}{a^2 + a - 6} \\ &= \frac{-a^2 + 5a - 6}{a^2 + a - 6} = \frac{-a+3}{a+3}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & 4-a \\ a-3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot (-1) - (4-a)(a-3)}{a^2 + a - 6} \\ &= \frac{a^2 - 8a + 12}{a^2 + a - 6} = \frac{a-6}{a+3}, \end{aligned}$$

där vi får täljardeterminanterna genom att i koefficientmatrisen ersätta kolumnen som svarar mot variabeln med högerledet.

W409 Lös ekvationssystemen

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ 2x + 5y + 3z &= 1, \\ -x + 2y + z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x + y - 3z &= 11, \\ 2x - 3y + 2z &= 9, \\ x + y + z &= -3, \end{aligned}$$

med gausselimination.

a) Vi skriver ekvationssystemet i ett räkneschema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

I den vänstra delen har vi skrivit upp koefficienterna framför x, y och z i respektive kolumn. I schemats högra del finns ekvationssystemets högerled. Det första steget i gausselimineringen är att utföra radoperationer så att vi får en 1:a i övre vänstra hörnet. Eftersom vi redan har en 1:a där behöver inget göras,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nästa steg är att få nollor under 1:an,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} -2 & + \\ & \\ & \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2-2\cdot 1 & 5-2\cdot 1 & 3-2\cdot 1 & 1-2\cdot 0 \\ -1+1 & 2+1 & 1+1 & 2+0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Sedan övergår vi till nästa diagonalelement och utför en radoperation så att vi får en 1:a där,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Vi utför nu radoperationer så att övriga element i samma kolumn blir noll,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \\ - & -3 \\ & \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

När den andra kolumnen är avklarad övergår vi till det tredje diagonalelementet. Det är redan 1 så vi behöver inte utföra någon radoperation för att få detta,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Det sista steget är att radreducera uppåt så att vi får nollor ovanför 1:an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Nu är vi klara och det är bara att avläsa lösningen. Enklast är nog att översätta tillbaka till ekvationsformen,

$$\begin{aligned} 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z &= -1, \\ 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z &= 0, \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z &= 1, \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= -1, \\ y \qquad &= 0, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

c) Vi ställer upp räkneschemat,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 11 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

Räknegången är precis densamma som i a-uppgiften.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 1 & -3 & 11 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{4} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad - \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{23}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{2}{7} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{23}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{4} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{2}{5} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} + \quad \frac{1}{2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

Från sluttablån kan vi avläsa lösningen

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = -2.$$

W410 Lös ekvationssystemen

a)
$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 1, \\ x - 2y + z &= 2, \\ 2x + y + 3z &= 0, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6, \\ 3x - 2y + 7z &= 14, \\ x + y - 3z &= -4, \end{aligned}$$

med gausselimination.

a) Vi kan börja med att slå ihop de första två stegen (att få en 1:a i övre vänstra hörnet och nollor därunder),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \sim$$

Notera att radoperationerna utförs i den ordning de står (från vänster till höger). I de följande stegen gör vi samma typ av rationalisering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{matrix} + & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Lösningen är alltså

$$x = \frac{1}{15}, \quad y = -\frac{13}{15}, \quad z = \frac{1}{3}.$$

c) Vi gausseliminerar som i a-uppgiften

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & 14 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 & - \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & -10 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & + \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} - & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Lösningen är

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 1.$$

W411 Lös följande ekvationssystem

a) $$\begin{aligned} x+2y-\ \ 8z&=0,\\ 2x-3y+\ \ 5z&=0,\\ 3x+2y-12z&=0,\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x+3y-\ \ z&=1,\\ x+\ \ y-3z&=0,\end{aligned}$$

med gausselimination.

a) Vi sätter igång och gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -8 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 0\\ 3 & 2 & -12 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -8 & 0\\ 0 & -7 & 21 & 0\\ 0 & -4 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Här har vi nått sluttablån. Den sista raden lyder

$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0,$$

d.v.s. $0=0$, vilket är en trivialitet. Vi kan alltså stryka den sista raden. De andra två raderna lyder

$$\begin{array}{rrcrcl} x & & - & 2z & = & 0,\\ & y & - & 3z & = & 0. \end{array}$$

Detta system har oändligt många lösningar. För varje värde på z får vi x- och y-värden som ger en lösning enligt

$$\begin{aligned} x&=2z,\\ y&=3z. \end{aligned}$$

Vi kan alltså beskriva alla lösningar till systemet genom att använda z som parameter,

$$\begin{aligned} x&=2t,\\ y&=3t, &\qquad (t \text{ parameter}),\\ z&=t. \end{aligned}$$

c) Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Denna sluttablå är av samma typ som i a-uppgiften. Vi ringar in de ledande 1:orna,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Övriga variabler får fungera som parametrar, d.v.s. z i detta fall. Lösningarna är

$$\begin{aligned} x&=-1+8t,\\ y&=1-5t, &\qquad (t \text{ parameter}),\\ z&=t. \end{aligned}$$

W413 Bestäm antalet lösningar N till följande system

b) $$\begin{aligned} 2x + 3y &= ax, \\ 4x + y &= ay, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x - y + z &= a, \\ 3x - 2y + z &= 0, \\ 2x - y \phantom{{}+z} &= 0, \end{aligned}$$

för alla värden på parametern a.

b) Vi samlar först variablerna i ena ledet

$$\begin{array}{rcrcl} (2-a)x & + & 3y & = & 0, \\ 4x & + & (1-a)y & = & 0. \end{array}$$

Eftersom högerledet är noll är systemet homogent och då finns alltid den triviala lösningen $x = y = 0$.

Om koefficientmatrisen dessutom är inverterbar är detta enda lösningen. Detta inträffar då

$$\begin{vmatrix} 2-a & 3 \\ 4 & 1-a \end{vmatrix} = (2-a)(1-a) - 3\cdot 4 = a^2 - 3a - 10 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad a \neq -2 \quad \text{och} \quad a \neq 5.$$

När $a = -2$ eller $a = 5$ är koefficientmatrisens determinant lika med noll och systemet har oändligt många lösningar (parameterlösning). Svaret blir alltså

$$\begin{aligned} N &= 1, && \text{när } a \neq -2 \text{ och } a \neq 5, \\ N &= \infty, && \text{när } a = -2 \text{ och } a = 5. \end{aligned}$$

c) Ekvationssystemet blir i matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om koefficientmatrisens determinant är skild från noll, är matrisen inverterbar och då finns det exakt en lösning. Vi undersöker därför determinantens värde först. Sarrus regel ger att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 1\cdot(-2)\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot(-1) \\ &\qquad - 1\cdot(-2)\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot(-1)\cdot 3 \\ &= 0 - 2 - 3 + 4 + 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Chansningen gick alltså inte hem. Vi sätter istället igång och gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 \quad -2 \end{matrix} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & -3a \\ 0 & 1 & -2 & -2a \end{array}\right) \begin{matrix} - \quad + \end{matrix} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2a \\ 0 & 1 & -2 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

Den sista raden i tablån lyder

$$0 = a.$$

Talet a måste alltså vara noll för att systemet ska ha någon lösning. När $a = 0$ ges lösningen av

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 2t, \qquad (t \text{ parameter}), \\ z &= t, \end{aligned}$$

d.v.s. vi har oändligt många lösningar. Svaret blir

$$\begin{aligned} N &= 0, && \text{när } a \neq 0, \text{ och} \\ N &= \infty, && \text{när } a = 0. \end{aligned}$$

W415 Undersök för vilka värden på konstanterna a och b som ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1,\\ 2x - 2y + 3z &= b,\\ 3x - y + az &= 2, \end{aligned}$$

har precis en lösning, flera olika lösningar respektive ingen lösning. I de fall då lösningar finns, skall dessa också bestämmas.

Vi gausseliminerar systemet och ser vad som händer,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3 & b\\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 1 & b-2\\ 0 & -4 & a-3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & a-4 & 1-b \end{array}\right) \sim$$

Beroende på värdet av a och b får vi olika fall:

$a - 4 \neq 0$: I detta fall kan vi slutföra gausseliminationen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & a-4 & -b+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+1}{a-4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c\\ 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+1}{a-4} \end{array}\right)$$

där

$$\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{4}\,\frac{-b+1}{a-4} = \frac{\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{13}{4}}{a-4},\\ d &= -\tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\,\frac{-b+1}{a-4} = \frac{-\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b - \frac{7}{4}}{a-4}. \end{aligned}$$

Alltså finns exakt en lösning,

$$x = c, \quad y = d, \quad z = \frac{-b+1}{a-4}.$$

$a - 4 = 0,\ b \neq 1$: Sista raden i ekvationssystemet lyder då $0 = 1 - b$ vilket inte är uppfyllt och systemet saknar därmed lösning.

$a - 4 = 0,\ b = 1$: Sista raden är då en nollrad som kan strykas. Resten av ekvationssystemet blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

och har oändligt många lösningar

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{5}{4}t + \tfrac{3}{4},\\ y &= \tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{4},\\ z &= t. \end{aligned}$$

W420 Visa att skärningslinjen mellan planen $x - y - 3z + 1 = 0$ och $x + 3y + z - 2 = 0$ är parallell med planet $5x + 7y - 3z + 3 = 0$ genom att söka lösningar till det system som bildas av de tre ekvationerna.

Planen i uppgiften bildar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x - y - 3z &= -1,\\ x + 3y + z &= 2,\\ 5x + 7y - 3z &= -3. \end{aligned}$$

Situationen i uppgiften uppstår om koefficientmatrisen har rang 2 (ett av fallen 2, 3, 4 eller 5 på sid 142 i kursboken) och det får vi redan på genom att gausseliminera matrisen,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom vi har två ledande ettor är rangen 2.

W326 Visa att matriserna

e) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

är inverterbara och bestäm inversen med Jacobis metod.

Vi bestämmer inversen till matrisen A genom att ställa upp matrisen

$$(A \mid E)$$

och radreducera matrisens vänstra hälft till E. I den reducerade matrisens högra hälft har vi då A^{-1},

$$(A \mid E) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}).$$

Om vi inte kan radreducera A till E saknar A invers. Vi bestämmer alltså inversen samtidigt som vi kontrollerar att inversen finns.

e)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 6 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

f)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Alltså existerar inverserna och är

e) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, respektive

f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

W322 Lös matrisekvationen $AX = A^t$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sarrus regel ger att

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1)$$
$$-1\cdot(-2)\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot(-1) - (-2)\cdot 2\cdot 1 = 8+8-1+4+4+4 = 27.$$

Alltså är A inverterbar och vi får lösningen till matrisekvationen genom att vänstermultiplicera med A^{-1},

$$X = A^{-1}A^t.$$

Vi kan beräkna denna produkt med räkneschemat

$$(A \mid A^t) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}A^t).$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -2 & \frac{7}{2} & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right)$$

Alltså är lösningen

$$X = A^{-1}A^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$