KTH Matematik

kontrollskrivning nr 2 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)
13 november 2007, kl 14.15-15.00

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

- Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Lösning

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} r_2 - r_1 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} r_3 - r_2 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} r_2 - 2r_1 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} r_2 \cdot (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Svar: } x = -2t,\ y = 1 + t,\ z = t.}$

2. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ 0x - 2y = -2 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Lösning

Vi skriver först upp det linjära ekvationssystemet på matrisform $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Mistakvadratlösningen beräknas genom att lösa normalekvationerna $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$, dvs

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 18\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

Svar: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

3. För vilka värden på a har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$\begin{cases}x-ay+3z=1\\ x+3y+az=2\\ 2x+y+5z=3\end{cases}$$

i) en entydig lösning
ii) saknar lösning

Lösning

Systemets determinant är $\det(A)=4a-2a^2$. Och $\det(A)=0\Rightarrow a=0,2$.

För $a=0$ får vi systemet

$$\begin{cases}x+3z=1\\ x+3y=2\\ 2x+y+5z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+3z=1\\ 3y-3z=1\\ y-z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+3z=1\\ y-z=1/3\\ y-z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+3z=1\\ y-z=1/3\\ 0=2/3\end{cases}$$

Systemet saknar lösning

För $a=2$ får vi systemet

$$\begin{cases}x-2y+3z=1\\ x+3y+2z=2\\ 2x+y+5z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y+3z=1\\ 5y-z=1\\ 5y-z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y+3z=1\\ 5y-z=1\\ 0=0\end{cases}$$

Vi två ekvationer av två plan som är inte parallella och dess skärning är en rätt linje som man får .ex kan man sätta $z=t$ och lösa ut x och y .systemet har oändligt många lösningar.

Svar

- En entydig lösning då $\det(A)\neq 0\Leftrightarrow a\neq 0,2$.
- Systemet saknar lösning då $a=0$

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 2 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)
13 november 2007, kl 14.15-15.00

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 4x+3y+2z=2 \\ x+\ y+\ z=1 \\ 3x+2y+\ z=1 \end{cases}$.

Lösning

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} r_1-r_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} r_1-r_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} r_2-3r_1 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} r_2\cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Svar: } x = t-1,\ y = 2-2t,\ z = t.}$

2. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x+y=-1 \\ 0x+2y=2 \\ x+3y=5 \end{cases}$$

Lösning

Vi skriver först upp det linjära ekvationssystemet på matrisform $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Mistakvadratlösningen beräknas genom att lösa normalekvationerna $A^t A$**x**$=A^t$**b**, dvs

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. För vilka värden på a har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$\begin{cases} x - ay + 3z = 1 \\ x + 3y + az = 2 \\ 2x + y + 5z = 3 \end{cases}$$

i) en entydig lösning

ii) oändligt många lösningar

Lösning

Systemets determinant är $\det(A) = 4a - 2a^2$. Och $\det(A) = 0 \Rightarrow a = 0{,}2$.

För $a = 0$ får vi systemet

$$\begin{cases} x + 3z = 1 \\ x + 3y = 2 \\ 2x + y + 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 1 \\ 3y - 3z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 1 \\ y - z = 1/3 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 1 \\ y - z = 1/3 \\ 0 = 2/3 \end{cases}$$

Systemet saknar lösning

För $a = 2$ får vi systemet

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + y + 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 5y - z = 1 \\ 5y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 5y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vi två ekvationer av två plan som är inte parallella och dess skärning är en rätt linje som man får .ex kan man sätta $z = t$ och lösa ut x och y .systemet har oändligt många lösningar.

Svar

- En entyg lösning då $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0{,}2$.
- Oändlig många lösningar om $a = 2$