KTH Matematik

kontrollskrivning nr 3 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

25 november 2008, kl 14.15-15.00

Version vänster.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Avgör om följande vektorer utgör en bas i rummet $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning

Vektorerna bildar en bas i rummet om dessa är linjärt oberoende , dvs den homgena

Ekvationsystem

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ har endast den triviala lösningen. Men detta ekvivalent med

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1(1\cdot 3 - 1\cdot 4) - 2(3\cdot 3 - 2\cdot 4) + 3(3\cdot 1 - 2\cdot 1) = 0$$

Svar=nej

2. Bestäm matrisen X så att $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösning

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vet om

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ så fås

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-3+2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

svar: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösning

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 1 - \lambda = \pm 2 \Rightarrow \lambda = -1, 3 \quad .$$

Egenvektorer bestäms ur ekvations sytem

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

och

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Svar $\lambda = -1$ med t.ex egenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där man valt $t = 1$

$\lambda = 3$ med t.ex egenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där man valt $t = 1$

KTH Matematik

kontrollskrivning nr 3 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

25 november 2008, kl 14.15–15.00

Version höger.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

- Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Avgör om följande vektorer utgör en bas i rummet $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Lösning

Vektorerna bildar en bas i rummet om dessa är linjärt oberoende , dvs den homgena

Ekvationsystem

$$x\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ har endast den triviala lösningen. Men detta

ekvivalent med

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&4\\2&1&2\end{pmatrix}\neq 0.$$

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&4\\2&1&2\end{pmatrix}=1(1\cdot 2-1\cdot 4)-2(3\cdot 2-2\cdot 4)+3(3\cdot 1-2\cdot 1)=5$$

Svar=Ja

2. Bestäm matrisen X så att $\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$

Lösning

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vet om

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ så fås

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-3+2)} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

svar: $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösning

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 1 - \lambda = \pm 2 \Rightarrow \lambda = -1, 3$.

Egenvektorer bestäms ur ekvations sytem

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ -2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

och

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Svar $\lambda = -1$ med t.ex egenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där man valt $t = 1$

$\lambda = 3$ med t.ex egenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där man valt $t = 1$