KTH Matematik

kontrollskrivning nr 4 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

25 november 2008, kl 14.15-15.00

Version vänster.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Vilka av följande matriser kan diagonaliseras av en ON matris P ?

$$A=\begin{pmatrix}1&5&4\\5&10&3\\4&3&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&4&3\\4&0&a\\3&5&19\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&2&5\\c&5&d\end{pmatrix}.$$

Svaret skall motiveras genom t ex åberopa någon lämplig sats som skall skrivas ner fullständig med ditt lösningsförslag.

Svar : Enligt diagonaliseringssatsen kan varje symmetrisk matris diagonaliseras med en ON-matris P (bestående av en ON bas av egenvektorer till matrisen A)

Här endast matriserna A och C kan diagonaliseras med en ON matris P,men även matrisen B om man kräver att $a=3$

2. Använd tex kvadratkomplettering för att lösa ekvationen
$z^2+2iz+2-4i=0$.

Lösning

$z^2+2iz+2-4i=(z+i)^2-i^2+2-4i=(z+i)^2+1+2-4i=(z-i)^2=3-4i$

Sätt $w=(z-i)=a+ib$ då fås

$w^2=3-4i \Leftrightarrow (a+ib)^2=3-4i \Leftrightarrow a^2-b^2+2ib=3-4i$

Vi får då $\begin{cases} a^2-b^2=3 & (1) \\ ab=-2 & (2) \end{cases}$

Vidare $\left|w^2\right|=\left|-4+3i\right| \Leftrightarrow a^2+b^2=5$ (3)

Ekv (2) säger att ab har olika tecken. ur ekv (1), och (3) fås $2a^2=2 \Rightarrow a=\pm 1$ och $2b^2=2 \Rightarrow b=\pm 1$. Detta ger att $a+ib=2-i$ och $a+ib=-2+i$.

Vidare $z+i=2-i \Rightarrow z=2-2i$ och $z+i=-2+i \Rightarrow z=-2$

Svar

$z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$ har lösningarnar $z = -2$ och $z = 2 - 2i$.

3. Visa med hjälp av den matematiska induktionen att för alla heltal $n \geq 1$ gäller likheten

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Bevis

<u>Bassteg</u> Kolla att påstående är sant för $n = 1$. Vi har

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 1$$. Alltså sant

<u>Induktionssteg.</u> Vi antar att påstående är sant för $n = p$ dvs $\sum_{k=1}^{p} (2k-1) = p^2$.

Vi vill visa att det måsta vara sant för $n = p+1$,dvs $\sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = (p+1)^2$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{p} (2k-1) + (2(p+1)-1) = p^2 + (2(p+1)-1) = p^2 + 2p + 2 - 1 = (p+1)^2$$

Eftersom vi har visat att påståendet gäller för bassteget *n=1* samt att antagandet att påståendet gäller för *n=p* medför att det också gäller för *n=p+1*, följer det från **<u>induktionsprincipen</u>** att påståendet gäller för varje heltal *n=1,2,3,...*

KTH Matematik

kontrollskrivning nr 4 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

25 november 2008, kl 14.15-15.00

Version höger.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering.
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

- Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Vilka av följande matriser kan diagonaliseras av en ON matris P?

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 4\\ a & 10 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 4 & 0 & b\\ 3 & 5 & 19\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & 2 & 5\\ c & 5 & d\end{pmatrix}$$

Svaret skall motiveras genom t ex åberopa någon lämplig sats som skall skrivas ner fullständig med ditt lösningsförslag.

Svar : Enligt diagonaliseringssatsen kan varje symmetrisk matris diagonaliseras med en ON-matris P (bestående av en ON bas av egenvektorer till matrisen A)

Här endast matriserna A och C kan diagonaliseras med en ON matris P, men även matrisen B om man kräver att $b = 3$

2. Använd tex kvadratkomplettering för att lösa ekvationen
$z^2 - 2iz - 4 + 4i = 0$.

Lösning

$z^2 - 2iz - 4 + 4i = (z-i)^2 - i^2 - 4 + 4i = (z-i)^2 + 1 - 4 + 4i = (z-i)^2 = 3 - 4i$

Sätt $w = (z-i) = a + ib$ då fås

$w^2 = 1 - 4i \Leftrightarrow (a+ib)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2ib = 3 - 4i$

Vi får då $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & (1) \\ ab = -2 & (2) \end{cases}$

Vidare $\left|w^2\right| = |3-4i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5 \quad (3)$

Ekv (2) säger att ab har olika tecken. ur ekv (1), och (3) fås $2a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2$ och $2b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1$. Detta ger att $a + ib = 2 - i$ och $a + ib = -2 + i$.

Vidare $z-i=2-i \Rightarrow z=2$ och $z-i=-2+i \Rightarrow z=-2+2i$
Svar
$z^2-2iz-4+4i=0$ har lösningarna $z=2$ och $z=-2+2i$.

3. Visa med hjälp av den matematiska induktionen att för alla heltal $n \geq 1$ gäller likheten

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)=2+4+6+8+\cdots+(2n)=n^2+n$$

Bevis
<u>Bassteg.</u> Kolla att påstående är sant för $n=1$. Vi har

$$\sum_{k=1}^{1}(2k)=1^2+1 \Leftrightarrow 2\cdot 1=2$$. Alltså sant

<u>Induktionssteg.</u> Vi antar att påstående är sant för $n=p$ dvs $\sum_{k=1}^{p}(2k)=p^2+p$.

Vi vill visa att det måsta vara sant för $n=p+1$,dvs $\sum_{k=1}^{p+1}(2k)=(p+1)^2+(p+1)$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{p+1}(2k)=\sum_{k=1}^{p}(2k)+(2(p+1))=p^2+p+(2(p+1))=p^2+p+2p+2=(p+1)^2+(p+1)$$

Eftersom vi har visat att påståendet gäller för bassteget *n=1* samt att antagandet att påståendet gäller för *n=p* medför att det också gäller för *n=p+1*, följer det från **induktionsprincipen** att påståendet gäller för varje heltal *n=1,2,3,...*