KTH Matematik

kontrollskrivning nr 2 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

26 november 2007, kl 10.15-11.15

Version vänster.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

* OBS!! Rätten att klaga på kontrollskrivningarna upphör när skrivningen lämnar undervisningslokalen.

1. Vad är villkoret på talet a för att systemet $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 5 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ skall ha exakt en lösning.

2 Avgör om vektorerna $(1,1,0,2)$, $(1,0,2,0)$ och $(1,2,0,1)$ är linjärt oberoende eller ej.

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$. Bestäm alla a–värden för vilka matrisen AB^{T} är inverterbar

KTH Matematik

kontrollskrivning nr 2 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

26 november 2007, kl 10.15-11.15

Version höger.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

* OBS!! Rätten att klaga på kontrollskrivningarna upphör när skrivningen lämnar undervisningslokalen.

1. Vad är villkoret på talet a för att systemet $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & a \\ 5 & -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ skall ha exakt en lösning.

2 . Avgör om vektorerna (1,2,1,0), (1,0,0,2) och (1,1,2,0) är linjärt oberoende eller ej.

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm alla a–värden för vilka matrisen AB^{T} är inverterbar

<u>Lösningsförslag till KS2</u>

Vänster

1. systemet har exakt en lösning om $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & 1 & -a\\ 5 & a & 1\end{pmatrix} \neq 0$

dvs $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ a & 1 & -a\\ 5 & a & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & 1\\ 5 & a\end{vmatrix} = 1 + a^2 + a^2 - 5 = 2a^2 - 4 \neq 0$

svar $a \neq \pm\sqrt{2}$

2. Vektorerna (1,1,0,2), (1,0,2,0) och (1,2,0,1) är linjärt oberoende om och endast om likheten

$$a(1,1,0,2) + b(1,0,2,0) + c(1,2,0,1) = (0,0,0,0)$$

inträffar endast då $a = b = c = 0$.

Vi har $a(1,1,0,2) + b(1,0,2,0) + c(1,2,0,1) = (a + b + c,\ a + 2c,\ 2b,\ 2a + c) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b + c = 0\\ a + 2c = 0\\ 2b = 0\\ 2a + c = 0\end{cases}$$

Ur den 3:e ekvationen fås $b = 0$.

Den 2:a resp den 4:e ekvationen ger $a = -2c$ resp $a = -c/2$ ⇒ $a = c = 0$.

Ekvationssystemet har endast en lösning $a = b = c = 0$ ⇒ vektorerna är linjärt oberoende.

Svar: Vektorerna är linjärt oberoende.

---

3. Vi har $AB^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1 + a\end{bmatrix}$ och $\det(AB^T) = a - 3$. AB^T är inverterbar $\Leftrightarrow$

$\det(AB^T) \neq 0$ dvs $a \neq 3$.

Svar: $a \neq 3$.

Höger

1. systemet har exakt en lösning om $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -a & 1 & a\\ 5 & -a & 1\end{pmatrix} \neq 0$

dvs $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -a & 1 & a\\ 5 & -a & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-a & 1\\ 5 & -a\end{vmatrix} = 1 + a^2 + a^2 - 5 = 2a^2 - 4 \neq 0$

svar $a \neq \pm\sqrt{2}$

$a \neq 1$

---

2. Avgör om vektorerna (1,2,1,0), (1,0,0,2) och (1,1,2,0) är linjärt oberoende eller ej.

Vektorerna (1,2,1,0), (1,0,0,2) och (1,1,2,0) är linjärt oberoende om och endast om likheten

$$a(1,2,1,0) + b(1,0,0,2) + c(1,1,2,0) = (0,0,0,0)$$

inträffar endast då $a = b = c = 0$.

Vi har $a(1,2,1,0) + b(1,0,0,2) + c(1,1,2,0) = (a + b + c,\ 2a + c,\ a + 2c,\ 2b) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$$

Ur den 4:e ekvationen fås $b = 0$.

Den 2:a resp den 4:e ekvationen ger $c = -2a$ resp $c = -a/2$ $\Rightarrow$ $a = c = 0$.

Ekvationssystemet har endast en lösning $a = b = c = 0$ $\Rightarrow$ vektorerna är linjärt oberoende.

Svar: Vektorerna är linjärt oberoende.

---

3 Vi har $AB^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 + a \end{bmatrix}$ och $\det(AB^{T}) = a - 3$. AB^{T} är inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(AB^{T}) \neq 0$ dvs $a \neq 3$.

Svar: $a \neq 3$.