INGENJÖRSHÖGSKOLAN
Matematik
Fredrik Abrahamsson

INGENJÖRSHÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Värmefördelning i en metallskiva

Diskretisering av s.k. kontinuerliga system resulterar ofta i linjära ekvationssystem - vi skall här titta lite närmare på ett sådant exemepel. Värmeflödet genom ett 2-dimensionellt objekt, t.ex en tunn metallskiva, bestäms av värmeledningsekvationen

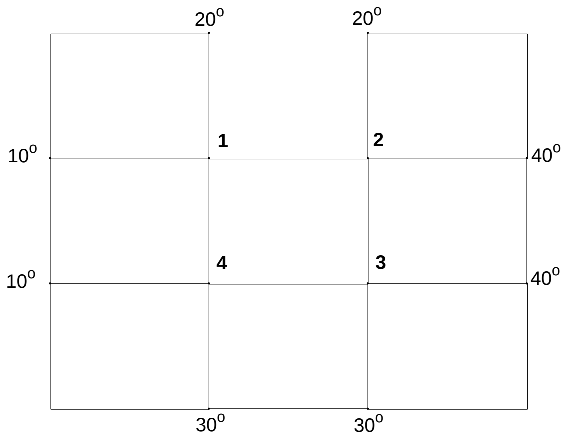
$$\mu\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

Detta är en s.k. *partiell differentialekvation*; här är temperaturen $T = T(x, y, t)$ en funktion av 3 variabler och $\nabla^2 T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$. Parametern μ är en värmeledningskonstant som är materialberoende och här låter vi $\mu = 1$. Betrakta nu en kvadratisk tunn metallskiva där vi ser till att de fyra kanternas temperaturer fixeras till 10^o, 20^o, 30^o resp. 40^o. Vad blir då temperaturen i en punkt (x, y) inne i skivan? Eftersom systemet strävar mot jämvikt så inträder efter en viss tid en *stationär* temperaturfördelning, dvs. $T(x, y, t) = T(x, y)$ och värmeledningsekvationen övergår i detta jämviktsläge till $\nabla^2 T = 0$. Detta är en extremt viktig partiell differentialekvation som modellerar alla möjliga fysikaliska fenomen inom områden som t.ex. elektromagnetism, hydrodynamik och gravitation. Funktioner som är lösningar till denna ekvation kallas för *harmoniska funktioner*, och de uppfyller en slags medelvärdesprincip - temperaturen i en viss punkt $T(x, y)$ måste vara lika med medelvärdet av temperaturen i omkringliggande punkter. Om detta inte vore fallet så skulle vi ha ett värmeflöde och därmed inte jämvikt. Denna egenskap kan visas matematiskt; om $\nabla^2 T = 0$ så får man om h är ett litet tal att

$$T(x, y) \approx \frac{1}{4}\big(T(x-h, y) + T(x+h, y) + T(x, y-h) + T(x, y+h)\big)\,.$$

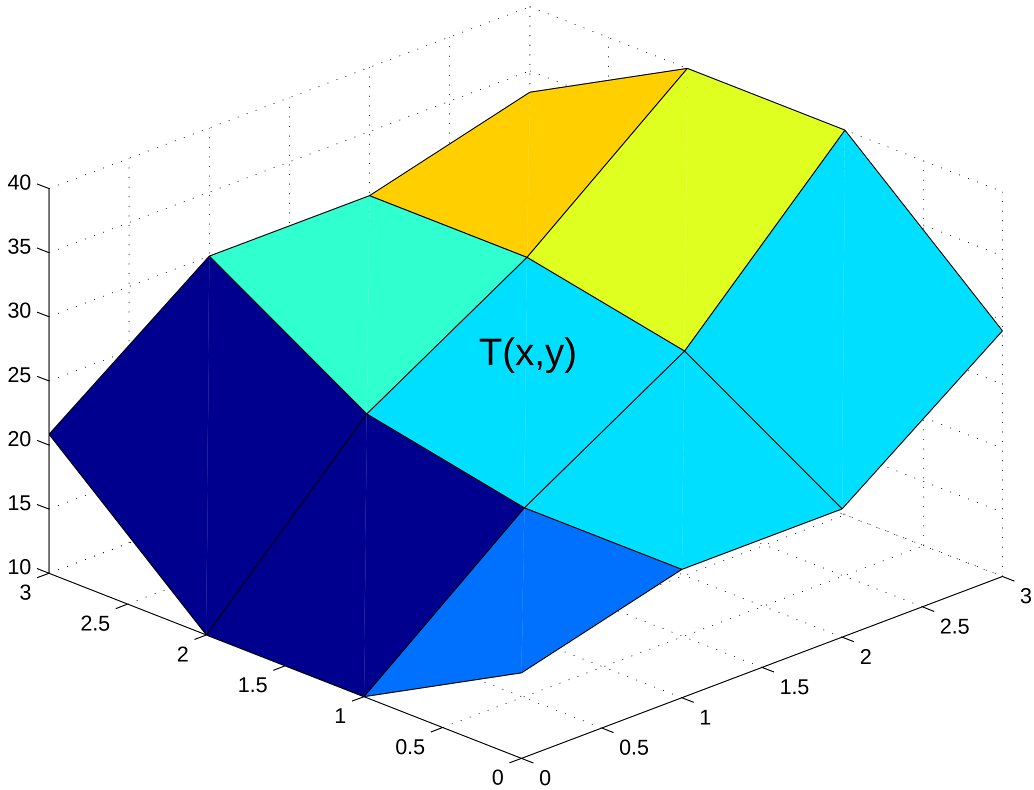
Detta säger bara att $T(x, y)$ är ungefär lika med medelvärdet av temperaturen i de fyra närliggande punkterna $(x-h, y)$, $(x+h, y)$, $(x, y-h)$ och $(x, y+h)$.

Låt oss nu försöka använda linjär algebra för att numeriskt ta fram värmefördelningen i metallskivan. En väldigt enkel modell av situationen visas i figuren; målet är att bestämma temperaturerna i punkterna $1-4$; kalla dessa temperaturer för $T_1, \dots, T_4$. Medelvärdesprincipen ger det linjära ekvationssystemet



$$\left\{\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{4}(10 + 20 + T_2 + T_4) \\ T_2 = \frac{1}{4}(T_1 + 20 + 40 + T_3) \\ T_3 = \frac{1}{4}(T_4 + T_2 + 40 + 30) \\ T_4 = \frac{1}{4}(10 + T_1 + T_3 + 30) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4T_1 - T_2 - T_4 = 30 \\ -T_1 + 4T_2 - T_3 = 60 \\ -T_2 + 4T_3 - T_4 = 70 \\ -T_1 - T_3 + 4T_4 = 40 \end{array}\right.$$

Gausselimination ger $T_1 = 20^o$, $T_2 = 27.5^o$, $T_3 = 30^o$, $T_4 = 22.5^o$. Nedan visas en plot över temperaturfördelningen i plattan.



Anmärkning. I praktiska sammanhang delar man förstås in området i ett väldigt finmaskigt rutnät - ekvationssystemet kan ha tusentals ekvationer och obekanta. Även för en snabb dator tar det tid att lösa sådana evationssystem - man utnyttjar därför mycket sofistikerade metoder för göra beräkningarna så snabbt som möjligt. T.ex. så kan man observera att vårt ekvationssystem ovan kan skrivas på formen $AX = Y$ där

$$X = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix},$$

och

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att A är en symmetrisk matris med vissa diagonala “band” med nollskilda element, man säger att matrisen är *gles*. Detta kan utnyttjas när man skriver lösningsalgoritmer till ekvationen $AX = Y$.