Linjär algebra - vad används det till?

1949 försökte professorn Wassily Leontief (Harvard) att testa sin matematiska modell för den amerikanska ekonomin. Han använde sig av universitets mest kraftfulla dator Mark II och matade in data i form av hålkort. Informationen på korten representerade en sammanställning av mer än 250000 olika statistiska data. Leontief hade delat in den amerikanska ekonomin i 500 olika sektorer - kolindustrin, bilindustrin, kommunikationer etc. Varje sektor modellerades med en linjär ekvation som beskrev hur den sektorn samverkade med de övriga 499 sektorerna. Dessvärre kunde inte Mark II hantera det ekvationssystem som blev resultatet, systemet hade 500 ekvationer och lika många variabler vilket var en omö jlig uppgift för denna dator. Leontief tvingades därför att förenkla sin modell till att omfatta 42 ekvationer i lika många variabler. Det tog ändå 56 timmar innan datorn kunde presentera en lösning.

Leontief fick 1973 Nobelpriset i ekonomi för sina matematiska modeller och han var en de första som utforskade tillämpningar av det som vi idag kallar linjär algebra.
I takt med datorutvecklingen har denna matematik blivit allt viktigare och idag resulterar så gott som varje matematisk modell i ett linjärt ekvationssystem i slutändan. Dagens datorer har naturligtvis inte samma begränsningar som de hade år 1949 - vi kan nu hantera ekvationssystem med tusentals ekvationer och obekanta. Några exempel på tillämpningsområden följer nedan.

• Den s.k. minsta kvadratmetoden är en av de mest använda beräkningsalgoritmerna som existerar. I korthet så går den ut på att finna den "bästa" lösningen till ett överbestämt linjärt ekvationssystem. T.ex. så kan man finna den "bästa" linjära modellen för en datamängd som kommer från en serie experiment.

• Från den datamängd som erhålls vid moderna röntgenmetoder såsom t.ex. magnetröntgen

skapas en digital bild av ett tvärsnitt av människokroppen. Denna bild konstrueras via analys av ett överbestämt linjärt ekvationssystem. S.k. minsta kvadratmetoder är viktiga här.

• Molekyler (t.ex. ett protein) kan modelleras genom att bryta ned dem i ett ändligt antal objekt (atomer) som kopplas ihop via attraherande och repellerande krafter. På samma sätt kan t.ex. en bro beskrivas. I båda fallen beskrivs systemets vibrationer av en differentialekvation på matrisform. Matrisens egenvärden svarar mot systemets egenfrekvenser.

• En situation där vissa egenskaper för en art som ärvs från generation till generation kan matematiskt beskrivas med en matrismodell. En fiskodlare eller en skogsförvaltare kan med hjälp av liknande modeller beräkna optimala nivåer för skörd och sådd.

• I många sammangang är det intressant att försöka hitta maximum eller minimum av en given funktion f(x) under vissa bivillkor g(x)=0. Om f och g är linjära funktioner så resulterar detta i att lösa ett linjärt ekvationssystem. T.ex. kan man försöka hitta den optimala blandningen av komponenter till en produkt, där proportionerna tillåts att variera inom vissa gränser.

• Bild- (t.ex. JPG), video- (t.ex. MPG4) och ljudkomprimeringsalgoritmer (t.ex. MP3) använder Fouriertransformer som är ett exempel på linjära avbildningar. Typiskt så delas materialet upp i små delar som sedan representeras som en vektor. Denna vektor transformeras med en linjär avbildning och man behåller bara den information som är nödvändig för att lura vår hjärna

• Dynamiska processer med förutbestämda "regler" (som kan bero på slumpen) kan kallas för ett spel. Inom spelteorin försöker man modellera sådana situationer och komma fram till optimala strategier för varje enskild spelare. I dessa matematiska modeller används bl.a. matriser.

• En datorbild kan representeras som en vektor där varje element svarar mot en pixel. I en flygsimulator eller i ett datorspel där man rör sig i en virtuell 3D-värld (t.ex. det populära Counterstrike) krävs det effektiv implementering av bl.a. rotationer och translationer. Detta utförs med hjälp av matrismultiplikationer.

• Med metoder från den linjära algebran kan man analysera nätverk av olika slag. Matriser representerar relationer mellan ob jekten i nätverket. Resultat från matrisalgebran kan sedan överföras på resultat om ob jekten i nätverket. Som exempel kan nämnas den sociala strukturen i en grupp, planering av flygsträckor och analys av olika mönster i ett riksdagsval.

• Om man vill konstruera t.ex. en bil ritar man en modell av bilen i en dator. Där interpoleras vissa givna punkter med glatta kurvor (s.k. splines). För att bestämma dessa kurvors matematiska former löser man linjära ekvationssystem.

• Väderstatistik kan användas för att uppskatta sannolikheten att det snöar en viss dag beroende på om det snöade eller inte dagen innan. Mer generellt så kan man tänka sig ett system som går från ett tillstånd till ett annat med viss sannolikhet. Sådana processer - Markovprocesser - hanteras med hjälp av matriser.

• Kodning används för att bl.a. felkorrigera meddelanden. Kryptering används för att säkert överföra känslig information och har blivit allt viktigare i samband med teknikutvecklingen. I båda fallen omformas data till kodad/krypterad data för att därefter återskapas till originaldata igen. Det finns många olika system som använder sig av matrismetoder för att åstadkomma detta.

• Teorin för dynamiska system behandlar iterationer av avbildningar eller lösningar till differentialekvationer. Man får en avbildning T (t) vars linjarisering är en matris. Om det största egenvärdet till denna matris växer exponentiellt så har systemet ett kaotiskt uppförande (Exempel på dynamiska system är vårt solsystem, partiklar i en vätska/gas, elektroner i ett plasma etc.)
skapas en digital bild av ett tvärsnitt av människokroppen. Denna bild konstrueras via analys av ett överbestämt linjärt ekvationssystem. S.k. minsta kvadratmetoder är viktiga här.

• Molekyler (t.ex. ett protein) kan modelleras genom att bryta ned dem i ett ändligt antal objekt (atomer) som kopplas ihop via attraherande och repellerande krafter. På samma sätt kan t.ex. en bro beskrivas. I båda fallen beskrivs systemets vibrationer av en differentialekvation på matrisform. Matrisens egenvärden svarar mot systemets egenfrekvenser.

• En situation där vissa egenskaper för en art som ärvs från generation till generation kan matematiskt beskrivas med en matrismodell. En fiskodlare eller en skogsförvaltare kan med hjälp av liknande modeller beräkna optimala nivåer för skörd och sådd.

• I många sammangang är det intressant att försöka hitta maximum eller minimum av en given funktion f(x) under vissa bivillkor g(x)=0. Om f och g är linjära funktioner så resulterar detta i att lösa ett linjärt ekvationssystem. T.ex. kan man försöka hitta den optimala blandningen av komponenter till en produkt, där proportionerna tillåts att variera inom vissa gränser.

• Bild- (t.ex. JPG), video- (t.ex. MPG4) och ljudkomprimeringsalgoritmer (t.ex. MP3) använder Fouriertransformer som är ett exempel på linjära avbildningar. Typiskt så delas materialet upp i små delar som sedan representeras som en vektor. Denna vektor transformeras med en linjär avbildning och man behåller bara den information som är nödvändig för att lura vår hjärna

• Dynamiska processer med förutbestämda "regler" (som kan bero på slumpen) kan kallas för ett spel. Inom spelteorin försöker man modellera sådana situationer och komma fram till optimala strategier för varje enskild spelare. I dessa matematiska modeller används bl.a. matriser.

• En datorbild kan representeras som en vektor där varje element svarar mot en pixel. I en flygsimulator eller i ett datorspel där man rör sig i en virtuell 3D-värld (t.ex. det populära Counterstrike) krävs det effektiv implementering av bl.a. rotationer och translationer. Detta utförs med hjälp av matrismultiplika