Läxa till Modul3. **KS3** =**<u>tre obetydligt ändrade tal kommer att väljas ur de nedanstående föreslagna talen</u>**

Läxa 13 till föreläsning13

1. a. Visa att vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,3,4)$ är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v} = (1,2,2,3)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1,2)$. (Dvs. visa att det finns konstanter a och b sådana att $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$.)

   b. Är vektorn $\boldsymbol{u} = (2,3,4,5)$ en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$?

2. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:

   a. (1,3,2,2), (1,0,–1,1), (1,1,0,0). (Vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ är linjärt oberoende om likheten $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)

   b. (1,3,2,–2), (1,0,–1,1), (1,1,0,0).

   c. (1,3,2), (2,1,1).

   d. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,3).

   e. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2).

   f. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2), (3,4,3).

3. Undersök om vektorerna c.–f. i uppgiften 18 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

<u>Svar:</u>

1. b. Nej.

2. a. linjärt oberoende. b. linjärt beroende.
   c. linjärt oberoende. d. linjärt beroende.
   e. linjärt oberoende. f. linjärt beroende.

3. c. bildar inte en bas. d. bildar inte en bas.
   e. bildar en bas. f. bildar inte en bas.

Läxa 14 till föreläsning 14

4. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Ledning. För att visa att $\boldsymbol{A}$ är inversen till $\boldsymbol{B}$ räcker det att visa att $\boldsymbol{AB} = \mathrm{I}$.

5. Bestäm inverser till följande matriser

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.   b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Bestäm inversen till matrisen $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - 3\boldsymbol{B})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

   Ledning. Multiplicera ledvis, från vänster med $\boldsymbol{A}^{-1}$. I vänsterledet får man $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}X = X$. Lösningen fås ur $X = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot$ den givna matrisen.

8. Undersök vilka av följande matriser beskriver en ON–transformation mellan två baser:

   a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.   b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.   c. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

   d. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 2 & -11 & 10 \\ 14 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Svar:

5. a. $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

7. $X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

8. Endast matriser i c och d.

Läxa 15 till föreläsning 15

9. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matris

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.

Svar:

9. a. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\boldsymbol{v}_1 = (0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2)$.

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\boldsymbol{v} = (3,2)$.

c. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1)$.

ledning se kursboken avsnitt 7.2 ex7.8,7.9 ,7.10

10. a. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,0)$.

Ledning Se kursboken avsnitt 7.2 ex 7.11,7.12.

11. Det kan man inte

<u>Läxa 16 till föreläsning 16</u>

12. Undersök vilka av följande matriser beskriver en transformation mellan två baser:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Bestäm transformationsmatrisen för övergången från

a. basen $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\boldsymbol{f} = \{2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2\}$ (den nya basen $\boldsymbol{f}$ består alltså av vektorerna $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ med koordinaterna (2,3) respektive (4,5) i den gamla basen $\boldsymbol{e}$).

b. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.

c. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.

14. a. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (2,1). Vilka är koordina terna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$?

b. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (3,4). Vilka är koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$?

<u>Svar.</u>

12. Endast matrisen i c.

13. a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. a. (3,–1) b. (7,11).

Läxa 17 till föreläsning 17

15. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna $(4,3)$ respektive $(3,2)$ som nya basvektorer $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$.

a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det gamla systemet har koordinaterna $(2,1)$?

b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det nya systemet har koordinaterna $(1,-1)$?

c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

16. En linjär avbildnig har i basen $\boldsymbol{e}$ matrisen $\boldsymbol{A_e}$ och i basen $\boldsymbol{f}$ matrisen $\boldsymbol{A_f}$. Bestäm

a. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

b. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

c. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

d. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

Svar

15. a. $(-1,2)$ b. $(1,1)$ c. $u + v = 2$

16 a. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ d. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

Tips om $\boldsymbol{P}$ är transformationmatrisen mellan baserna $\boldsymbol{e}$ och $\boldsymbol{f}$ så gäller att
$\boldsymbol{A_e} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A_f}\,\boldsymbol{P^{-1}} \Leftrightarrow \boldsymbol{A_f} = \boldsymbol{P^{-1}}\,\boldsymbol{A_e}\,\boldsymbol{P}$, där $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix}$, och $\boldsymbol{P^{-1}} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}$