Läxa till Modul4. **KS4** =**<u>tre obetydligt ändrade tal kommer att väljas ur de nedanstående föreslagna talen</u>**

Läxa19 till föreläsning19

1. Vilka av följande matriser är ON–diagonaliserbara?

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Visa att matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm $\boldsymbol{A}^{10}$.

3. Undersök om $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm matris $\boldsymbol{P}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. c. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Svar:</u>

1. b men inte a.

2. $\boldsymbol{A}^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a.T.ex $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Ej diagonaliserbar.

c. T.ex $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Läxa20 till föreläsning20

4. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

   a. $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5.$

   b. $4xy + 3y^2 = 1.$

   c. $2y^2 + 4xy - x^2 = 1.$

5. Beräkna arean innanför ellipsen $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$. Det anses känt att arean innanför ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är lika med πab.

6. Bestäm kortaste avståndet från origo till den kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

   $2x^2 - 4xy - y^2 = 1.$

Svar:

4 a. $2x^2 + y^2 = 1$, ellips.

b. $4x^2 - y^2 = 1$, hyperbel.

c. $3x^2 - 2y^2 = 1$, hyperbel.

5. $\pi/\sqrt{6}$.

6. $1/\sqrt{3}$.

Läxa21 till föreläsning21

7. Visa med induktion att $4^n - 1$ är jämnt delbart med 3 för $n = 1, 2, 3, \dots$.

8. Visa med induktion att $11^n - 1$ är jämnt delbart med 5 för $n = 1, 2, 3, \dots$.

9. Visa med induktion att $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$
för $n = 1, 2, 3, \dots$.

10. Visa med induktion att $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2$ för
$n = 1, 2, 3, \dots$.

Läxa122 till föreläsning22

11. Skriv på formen $a + b$i, där a och b är reella,

a. $(2 + i)(1 - 2i)^2$.

b. $\dfrac{1 + 2i}{3 - 4i} + \dfrac{3i}{1 + 2i}$

12. Lös ekvationerna

a. $(2 - i)z = 3 + i$.

b. $(2 + i)\overline{z} = 1 + 3i$

c. $(2 + i)\overline{z} + iz = 2 - 2i$.

13. Skriv på polär form

a. $\dfrac{(2 + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{(\sqrt{12} - 2i)i}$

b. $\dfrac{(\sqrt{3} + 3i)^4}{(1 - i)^6}$

14 Lös ekvationen

a. $z^4 + 4 = 0$.

b. $(z - 1)^3 + 8i = 0$.

Svar:

11. a. $-2 - 11i$. b. $1 + i$.

12. a. $1 + i$. b. $1 - i$. c. $1 + 2i$.

13. a. $\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$. b. $18(\cos(-7\pi/6) + i\sin(-7\pi/6))$.

14. a. $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$. b. $1 + \sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3} - i, 1 + 2i$.

<u>Läxa23 till föreläsning23</u>

15. Använd kvadratkompletterings metod för att bestäma alla komplexa tal som uppfyller ekvationen
$z^2 - z + 1 - i = 0$.
(se föreläsning 23)

16. Man vet att $z = 1 + \mathrm{i}$ är en rot till den nedanstående ekvationen. Bestäm de övriga rötterna.
a. $z^3 + (-1 - \mathrm{i})z^2 + z - 1 - \mathrm{i} = 0$
b. $z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0$.

(se föreläsning 23)

17. Bestäm talet a så att ekvationen $z^3 - az^2 - 2\mathrm{i}z + a + 5\mathrm{i} = 0$ får roten $z = a$. Bestäm de övriga rötterna

(se föreläsning 23)

<u>Svar</u>
15 . $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -i$.
16. a. $\pm\mathrm{i}$
b. 3, $1 + \mathrm{i}$.
17. $a = 2 - \mathrm{i}$. De övriga rötterna är $1 + \mathrm{i}$ och $-1 - \mathrm{i}$.