Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1A

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Vi vill studera funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^4+1}.$$

(a) Beräkna $\lim_{x\to\infty} f(x)$. (1p)

(b) Visa att $f(-x) = f(x)$. (1p)

(c) Skissera f:s graf med hjälp av (a) och (b) samt f:s uppenbara nollställe. (1p)

Lösning:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^4+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^4} \cdot \frac{1}{1+x^{-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^{-4}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

(b)

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^4+1} = \frac{2x^2}{x^4+1} = f(x).$$

(c) Med hjälp av (a), (b) och $f(x) = 0 \iff x = 0$ är det LÄTT att rita grafen själv!

2. (a) Bestäm inversen f^{-1} till funktionen

$$y = f(x) = \frac{2x}{3x-1}. \qquad (2p)$$

(b) Visa att $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$. (1p)

Lösning:

(a)

$$y = \frac{2x}{3x-1} \iff 3xy - y = 2x \iff x(3y-2) = y \iff$$
$$x = \frac{y}{3y-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3x-2}.$$

(b)

$$f \circ f^{-1}(x) = f\left(\frac{x}{3x-2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{x}{3x-2}}{3 \cdot \frac{x}{3x-2} - 1}$$
$$= \frac{\frac{2x}{3x-2}}{\frac{3x-3x+2}{3x-2}} = \frac{2x}{2} = x.$$

3. Beräkna

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}. \qquad (3p)$$

Lösning: Genom att faktorisera täljaren och nämnaren med hjälp av sina nollställen får man

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3} \to \frac{-2-1}{-2+3} = -3 \text{ då } x \to -2.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Vi vill studera funktionen

$$f(x) = \frac{2x}{x-2}.$$

(a) Beräkna $\lim_{x\to\infty} f(x)$. (1p)

(b) Bestäm eventuella lodräta asymptoter. (1p)

(c) Skissera f:s graf med hjälp av (a) och (b). (1p)

Lösning:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{2}{1-2x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-2x^{-1}} = 2.$$

(b) $x = 2$ är en lodrät asymptot.

(c) $x \to 2^+ \implies f(x) \to +\infty$, $x \to 2^- \implies f(x) \to -\infty$ och $x \to \pm\infty \implies f(x) \to 2$ gör det LÄTT att rita f:s graf!

2. (a) Bestäm inversen f^{-1} till funktionen

$$y = f(x) = \frac{3x}{x+2}. \qquad (2p)$$

(b) Visa att $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$. (1p)

Lösning:

(a)

$$y = \frac{3x}{x+2} \iff yx + 2y = 3x \iff x(y-3) = -2y \iff$$
$$x = \frac{-2y}{y-3} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-3}.$$

(b)

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\left(\frac{3x}{x+2}\right) = \frac{-2 \cdot \frac{3x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2} - 3}$$
$$= \frac{\frac{-6x}{x+2}}{\frac{3x-3x-6}{x+2}} = \frac{-6x}{-6} = x.$$

3. Beräkna

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a}.$$ (3p)

där a är ett fixt tal.

Lösning:

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = -\frac{1}{ax} \to -\frac{1}{a^2} \quad \text{då} \quad x \to a.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2A

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Derivera funktionen $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ och förenkla sedan derivatan så långt det går.

   Lösning: $f(x) = x \cdot (1-x^2)^{1/2} \Longrightarrow$

   $$f'(x) = (1-x^2)^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x)$$
   $$= \sqrt{1-x^2} - x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Visa att $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ för alla x.

   Lösning: $f(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \Longrightarrow$

   $$f'(x) = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x,$$

   som är < 0 då $x < 0$, $= 0$ då $x = 0$ och > 0 då $x > 0$. Härav följer att f:s *minsta* värde är $= f(0) = 0$, så $f(x) \geq 0$ för alla x.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y = x$.

   Lösning: Karakteristiska ekvaationen $r^2 + 4 = 0$ har rötterna $r = \pm 2i \Longrightarrow y_{\text{hom}} = A\cos 2x + B\sin 2x$. Om vi ansätter partikulärlösningen $y_{\text{p}} = ax$ så får vi $0 + 4ax = x \iff a = 1/4$.

   SVAR: $y = A\cos 2x + B\sin 2x + x/4$.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Derivera funktionen
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$
och förenkla sedan derivatan så långt det går.

   Lösning: $f(x) = (e^x - 1)/(e^x + 1) \implies$
$$f'(x) = \frac{(e^x+1)e^x - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

2. Visa att $x^2 \geq 1 + 2\ln x$ då $x > 0$.

   Lösning: $f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \implies$
$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2\frac{x^2-1}{x} = 2\frac{(x+1)(x-1)}{x},$$
som är < 0 då $0 < x < 1$, $= 0$ då $x = 1$ och > 0 då $x > 1$. Härav följer att f:s *minsta* värde då $x > 0$ är $= f(1) = 0$, så $f(x) \geq 0$ där.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 4y = e^x$.

   Lösning: Karakteristiska ekvaationen $r^2 - 4 = 0$ har rötterna $r = \pm 2 \implies y_{\text{hom}} = Ae^{2x} + Be^{-2x}$. Om vi ansätter partikulärlösningen $y_{\text{p}} = ae^x$ så får vi $(a - 4a)e^x = e^x \iff -3a = 1 \iff a = -1/3$.

   SVAR: $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - 1/3\, e^x$.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3A

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx.$$

Lösning:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = \{u = \sqrt{x+1} \Longrightarrow x = u^2 - 1 \Longrightarrow dx = 2u\,du\}$$
$$= \int \frac{u}{u^2-1}\cdot 2u\,du = 2\int \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}\,du = 2\int \left(1 + \frac{1}{(u-1)(u+1)}\right)du$$
$$= 2\int \left(1 + \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}\right)du = 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$
$$= 2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$

2. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lösning:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \{u = 1 - x^2 \Longrightarrow du = -2x\,dx \iff x\,dx = (-1/2)\,du\}$$
$$= \int_{u=1}^0 \frac{(-1/2)\,du}{u^{1/2}} = \int_0^1 \frac{1}{2}u^{-1/2}\,du = \left[u^{1/2}\right]_0^1 = 1.$$

3. Härled volymen av ett klot med radien R.

   Lösning: Volymen V av ett klot med radien R kan beräknas som den rotationsvolym man får då halvcirkeln $\{y = \sqrt{R^2 - x^2},\ -R \leq x \leq R\}$ roterar runt x-axeln. Eller man kan ta två gånger volymen då $0 \leq x \leq R$:

$$V = 2\int_0^R \pi y^2(x)\,dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R$$
$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}} &= \{u=\sqrt{x-4} \Longrightarrow x=u^2+4 \Longrightarrow dx = 2u\,du\} \\ &= \int \frac{2u\,du}{u(u^2+4)} = \frac{2}{4}\int \frac{du}{1+(u/2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\arctan(u/2) + C = \arctan\frac{\sqrt{x-4}}{2} + C.\end{aligned}$$

2. Beräkna
$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{x-1}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{x-1} &= \int_{-1}^{0} \frac{(x^2-1)+1}{x-1}\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}+1-\ln 2 = \frac{1}{2}-\ln 2.\end{aligned}$$

3. Härled arean av en cirkelskiva med radien R.

Lösning: Cirkeln med radien R och med origo som medelpunkt ges av ekvationen $y^2 + x^2 = R^2$. Då $y \geq 0$ är $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Vi beräknar den sökta arean A som fyra gånger arean i första kvadranten:

$$A = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Låt θ vara vinkeln i en rätvinklig triangel med motstående kateten $= x$, hypotenusan $= R$ och närliggande kateten $= \sqrt{R^2 - x^2}$. Då är

$$\sin\theta = \frac{x}{R} \iff x = R\sin\theta \Longrightarrow dx = R\cos\theta\, d\theta,$$

och

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R} \iff \sqrt{R^2 - x^2} = R\cos\theta.$$

Alltså blir

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} R^2\cos^2\theta\, d\theta = 2R^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta \\ &= 2R^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 4A

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Undersök huruvida
$$\sum_{k=8}^{\infty} \frac{5}{k\sqrt{k-7}}$$
är konvergent eller inte.

Lösning:

$$a_k = \frac{5}{k\sqrt{k-7}} = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-7/k}} = b_k \cdot \frac{5}{\sqrt{1-7/k}}$$

med $b_k = \frac{1}{k^{3/2}}$. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1-7/k}} = 5 \quad \text{ser vi att} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 5.$$

Vidare är serien
$$\sum_{k=8}^{\infty} b_k = \sum_{k=8}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$
konvergent eftersom $3/2 > 1$. Enligt jämförelsesatsen är då också $\sum_{k=8}^{\infty} a_k$ konvergent.

2. Bestäm de tre första från noll skilda termerna i Taylorutvecklingen av $\sin x$ omkring punkten $x = \pi/6$.

   Lösning:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sin x \Longrightarrow f(\pi/6) = \frac{1}{2},\\
&f'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&f''(x) = -\sin x \Longrightarrow \frac{f''(\pi/6)}{2!} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Longrightarrow\\
&\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

3. Beräkna

$$
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}.
$$

   Lösning:

$$
\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5) - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}
$$

$$
= \frac{\frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} + \mathcal{O}(x) \to \frac{1}{24} \quad \text{då} \quad x \to 0.
$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 4B

i SF 1625 Envariabelanalys för E, ht 2007.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Undersök huruvida

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{5^k - 7}$$

är konvergent eller inte.

Lösning:

$$a_k = \frac{4^k}{5^k - 7} = \frac{4^k}{5^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{7}{5^k}} = b_k \cdot \frac{1}{1 - \frac{7}{5^k}}$$

med $b_k = (4/5)^k$. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{7}{5^k}} = 1 \quad \text{ser vi att} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1.$$

Vidare är den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

konvergent eftersom $4/5 < 1$. Enligt jämförelsesatsen är då också $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ konvergent.

2. Bestäm de tre första från noll skilda termerna i Taylorutvecklingen av $\cos x$ omkring punkten $x = \pi/6$.

   Lösning:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \cos x \Longrightarrow f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&f'(x) = -\sin x \Longrightarrow f'(\pi/6) = -\frac{1}{2} \\
&f''(x) = -\cos x \Longrightarrow \frac{f''(\pi/6)}{2!} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \\
&\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \dots
\end{aligned}
$$

3. Beräkna

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.
$$

   Lösning:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} \\
&= \frac{\frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)}{x^5} = \frac{1}{120} + \mathcal{O}(x^2) \to \frac{1}{120} \quad \text{då} \quad x \to 0.
\end{aligned}
$$