Matematik, KTH,
Olle Stormark.

# Kontrollskrivning 1A

## i SF1625 Envariabelanalys för E, ht 2008.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm $\cos(\arcsin(-1/3))$.

   **Lösning:** Rita vinkeln $\theta = \arcsin(-1/3)$ i enhetscirkelns fjärde kvadrant, samt inse dels att $\cos(\theta) > 0$ och dels att enligt Pythagoras är

   $$1^2 = (\cos(\theta))^2 + (1/3)^2 \iff (\cos(\theta))^2 = 8/9.$$

   SVAR: $\cos(\arcsin(-1/3)) = 2\sqrt{2}/3$.

2. Låt

   $$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} \quad \text{då} \quad x \neq -4.$$

   Beräkna $f$:s invers $f^{-1}$, samt verifiera att

   $$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \quad \text{och} \quad f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

   **Lösning:**

   $$y = \frac{2x+3}{x+4} \iff y(x+4) = 2x+3 \iff$$
   $$x(2-y) = 4y-3 \iff x = f^{-1}(y) = \frac{4y-3}{2-y} \quad \text{då} \quad y \neq 2.$$

   $$f(f^{-1}(y)) = \frac{2\frac{4y-3}{2-y}+3}{\frac{4y-3}{2-y}+4} = \frac{8y-6+6-3y}{4y-3+8-4y} = \frac{5y}{5} = y.$$

   $$f^{-1}(f(x)) = \frac{4\frac{2x+3}{x+4}-3}{2-\frac{2x+3}{x+4}} = \frac{8x+12-3x-12}{2x+8-2x-3} = \frac{5x}{5} = x.$$

3. Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \cos 2x}{5x^2+2}.$$

**Lösning:** $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{-x}{x^2} \cdot \frac{1}{5+2x^{-2}} \leq \frac{x \cdot \cos 2x}{5x^2+2} \leq \frac{x}{x^2} \cdot \frac{1}{5+2x^{-2}} \quad &\Longleftrightarrow \\ -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{5+2x^{-2}} \leq \frac{x \cdot \cos 2x}{5x^2+2} \leq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{5+2x^{-2}}. & \end{aligned}$$

Då $x \to \infty$ går båda ytterleden mot 0, varför

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \cos 2x}{5x^2+2} = 0.$$