Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 2A

i SF1625 Envariabelanalys för E, ht 2008.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Använd *derivatans definition* för att beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = 3x + \frac{2}{x} \quad \text{då } x \neq 0.$$

Lösning:

$$f(x) = 3x + \frac{2}{x} \Longrightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left(3(x+\Delta x) + \frac{2}{x+\Delta x} - 3x - \frac{2}{x}\right) = 3 + \frac{2}{\Delta x}\left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= 3 + \frac{2}{\Delta x} \cdot \frac{x - x - \Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x} = 3 - \frac{2}{(x+\Delta x)x} \to 3 - \frac{2}{x^2} \quad \text{då } \Delta x \to 0.$$

2. Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen $f(x) = x\sqrt{12-x}$ antar på intervallet $3 \leq x \leq 11$.

Lösning:

- Randpunkter: $f(3) = 3\sqrt{9} = 9, \quad f(11) = 11 \cdot 1 = 11.$
- Inre stationära punkter:

$$0 = f'(x) = (12-x)^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2}(12-x)^{-1/2} \cdot (-1)$$
$$= \sqrt{12-x} - \frac{x}{2\sqrt{12-x}} = \frac{2(12-x)-x}{2\sqrt{12-x}} = \frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}} = \frac{-3(x-8)}{2\sqrt{12-x}}$$
$$\Longrightarrow x = 8, \text{ och } f(8) = 8 \cdot \sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16.$$

SVAR: Största värdet är $= 16$ då $x = 8$, minsta är $= 9$ då $x = 3$.

3. Lös differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 3x$.

   Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har dubbelroten $r = 2$, så $y_{\mathrm{hom}} = A\,e^{2x} + B\,xe^{2x}$. Ansätt sedan partikulärlösningen $y_{\mathrm{p}} = ax + b$, som medför att $y_{\mathrm{p}}' = a$, $y_{\mathrm{p}}'' = 0$, varefter insättning ger

$$\begin{aligned}
&0 - 4a + 4ax + 4b = 3x \iff x\,(4a-3) + 4(b-a) = 0 \implies \\
&a = \frac{3}{4}, \quad b = a = \frac{3}{4} \implies \\
&y = A\,e^{2x} + B\,xe^{2x} + \frac{3}{4}(x+1).
\end{aligned}$$