Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Kontrollskrivning 2B

i SF1625 Envariabelanalys för E, ht 2008.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Använd *derivatans definition* för att beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x} \quad \text{då } x \neq 0.$$

Lösning:

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x} \Longrightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left(2(x+\Delta x) + \frac{3}{x+\Delta x} - 2x - \frac{3}{x}\right) = 2 + \frac{3}{\Delta x}\left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= 2 + \frac{3}{\Delta x}\cdot\frac{x - x - \Delta x}{(x+\Delta x)x} = 2 - \frac{3}{(x+\Delta x)x} \to 2 - \frac{3}{x^2} \quad \text{då } \Delta x \to 0.$$

2. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x) = (12 - x)\sqrt{x}$ på intervallet $1 \leq x \leq 9$.

Lösning:

$$f(x) = (12 - x)\sqrt{x} = 12x^{1/2} - x^{3/2} \quad \text{då } 1 \leq x \leq 9.$$

- Randpunkter: $f(1) = (12 - 1)\cdot 1 = 11, \quad f(9) = 3 \cdot 3 = 9.$

- Inre stationära punkter:

$$0 = f'(x) = 6x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{12-3x}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{-3(x-4)}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow x = 4, \text{ och } f(4) = 8 \cdot 2 = 16.$$

SVAR: Största värdet är $= 16$ då $x = 4$, minsta är $= 9$ då $x = 9$.

3. Lös differentialekvationen $y'' - 6y' + 9y = 3e^{5x}$.

   Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 - 6r + 9 = 0$ har dubbelroten $r = 3$, så $y_{\text{hom}} = A\,e^{3x} + B\,xe^{3x}$. Ansätt sedan partikulärlösningen $y_{\text{p}} = a \cdot e^{5x}$, som medför att $y_{\text{p}}' = 5a \cdot e^{5x}$ och $y_{\text{p}}'' = 25a \cdot e^{5x}$, varefter insättning ger

$$e^{5x} \cdot (25a - 30a + 9a) = 3 \cdot e^{5x} \iff 4a = 3 \iff a = \frac{3}{4} \Longrightarrow$$
$$y = A\,e^{3x} + B\,xe^{3x} + \frac{3}{4}e^{5x}.$$