

# Kontrollskrivning 3A

i SF1625 Envariabelanalys för E, ht 2008.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+4}}.$$

**Lösning:**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+4}} &= \{u = \sqrt{x+4} \implies x = u^2 - 4 \implies dx = 2u du\} \\ &= \int \frac{2u du}{1+u} = 2 \int \frac{(u+1) - 1}{u+1} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= 2(u - \ln|u+1|) + C = 2\sqrt{x+4} - 2\ln|\sqrt{x+4}+1| + C. \end{aligned}$$

2. Beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

LEDNING:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \dots$$

**Lösning:**

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x} &= \int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos^2 x} = \{u = \cos x \implies du = -\sin x \, dx\} \\ &= -\int \frac{du}{1 - u^2} = \int \frac{du}{(u - 1)(u + 1)} = \{\text{handpåläggnig}\} \\ &= \int \left( \frac{1/2}{u - 1} - \frac{1/2}{u + 1} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.\end{aligned}$$

3. Bestäm arean av den paraboloid som fås genom att rotera parabelbågen  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ , ett varv runt  $y$ -axeln.

**Lösning:**

$$\begin{aligned}\text{Arean} &= \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x \, ds = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} \, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx \\ &= \{u = 4x^2 + 1 \implies du = 8x \, dx \iff x \, dx = du/8\} = \frac{\pi}{4} \int_1^9 u^{1/2} \, du \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot [u^{3/2}]_1^9 = \frac{\pi}{6} \cdot (27 - 1) = \frac{13\pi}{3}.\end{aligned}$$