

Kontrollskrivning 3B

i SF1625 Envariabelanalys för E, ht 2008.

- Inga hjälpmedel.
- Varje tal ger maximalt 3 poäng. För godkänd KS krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{1+x^{1/3}}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^{1/3}} &= \{u = x^{1/3} \implies x = u^3 \implies dx = 3u^2 du\} = \int \frac{3u^2 du}{1+u} \\ &= 3 \int \frac{(u^2-1)+1}{u+1} = 3 \int \left(u-1 + \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= 3 \left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1|\right) + C \\ &= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3x^{1/3} + 3\ln|1+x^{1/3}| + C. \end{aligned}$$

2. Beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

LEDNING:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \dots$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} &= \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} = \{u = \sin x \implies du = \cos x \, dx\} \\ &= \int \frac{du}{1 - u^2} = - \int \frac{du}{(u - 1)(u + 1)} = \{\text{handpålägning}\} \\ &= - \int \left(\frac{1/2}{u - 1} - \frac{1/2}{u + 1} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C.\end{aligned}$$

3. Bestäm båglängden av kurvan $y = x^{3/2}$, där $0 \leq x \leq 5$.

Lösning: Båglängdselementet ds fås genom

$$\begin{aligned}ds^2 &= (1 + (y')^2) dx^2 = \left(1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2} \right)^2 \right) dx^2 = \left(1 + \frac{9x}{4} \right) dx^2 \\ &= \frac{4 + 9x}{4} dx^2.\end{aligned}$$

Därmed fås

$$\begin{aligned}s &= \int ds = \frac{1}{2} \int_0^5 (4 + 9x)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot [(4 + 9x)^{3/2}]_0^5 \\ &= \frac{1}{27} (49^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{1}{27} (49 \cdot 7 - 4 \cdot 2) = \frac{343 - 8}{27} = \frac{335}{27}.\end{aligned}$$