KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 1A (grön)
fredagen den 17 oktober 2008 klo 13.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Givet sambandet $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Bestäm ett så stort intervall som möjligt där denna funktion är inverterbar. Beräkna sedan inversen (den inversa funktionen).

2. Bevisa med matematisk induktion att

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2m-1) = m^2$$

för alla positiva heltal m .

3. Givet olikheterna $\ln(1+x) < f(x) < 3\,\ln(1+3x)$ för alla positiva reella x .
Vad kan sägas om $\lim_{x\to\infty} f(x)$ och vad kan sägas om $\lim_{x\to 0+} f(x)$?

SVAR: **1.** Först ser man att $1-x^2$ måste vara positivt, dvs $-1 < x < 1$. Men på *hela* detta intervall kan man ej invertera funktionen p g a uttrycket x^2 , eftersom t ex $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(+\dfrac{1}{2}\right)^2$. Om man *inskränker* x till att vara *antingen* positiv *eller* negativ, får man två möjligheter, varav den enklaste ovedersägligen är att välja $x \geq 0$:
På intervallet $I : 0 \leq x < 1$ är funktionen $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ inverterbar, eftersom funktionen är strängt växande på hela detta intervall. Vi inverterar genom att lösa ut y som funktion av x : $y^2 = \dfrac{1}{1-x^2}$, $1-x^2 = \dfrac{1}{y^2}$, $x^2 = 1-\dfrac{1}{y^2}$, $x = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{y^2}}$.
Men $x \geq 0$, varav $x = f^{-1}(y) = \sqrt{1-\dfrac{1}{y^2}}$, $1 \leq y < \infty$.

2. Formeln stämmer då $m = 1$. Under induktionssteget skall man t ex visa att $m^2 + (2m+1) = (m+1)^2$.

3. Eftersom *båda* logaritmerna går mot oändligheten då x går mot oändligheten och vår funktion f är instängd mellan dem, så måste även $f(x)$ gå mot oändligheten då x gör det: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
Då x krymper ner mot noll, går *båda* logaritmerna mot noll, varför även den instängda $f(x)$ *måste* gå mot noll: $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 1B (rosa)
fredagen den 17 oktober 2008 klo 13.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Funktionen $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ är *inte* definierad för alla reella x . Kan man "bättra på" definitionen så att den blir **definierad** och **kontinuerlig** *för alla reella* x ? Hur då?

2. Bevisa med matematiska induktion att

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad \text{för alla heltal } n \geq 1 \ .$$

3. Lös ekvationen $2 \ln(x-4) = \ln 2 + \ln x$.

SVAR: **1.** Täljaren, funktionen $g(x) = \sin \pi x = \sin(\pi x)$ är definierad och kontinuerlig för alla reella x . Detsamma gäller för nämnaren $h(x) = \pi x$. Således är kvoten $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ definierad och kontinuerlig överallt, där nämnaren $h(x)$ är skild från noll, dvs då $x \neq 0$. Då x går mot noll kan vi beräkna gränsvärdet av $f(x)$, om vi substituerar $\pi x = t$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$. Om man nu *bestämmer* att $f(0) = 1$, så blir funktionen $f(x)$ definierad och kontinuerlig för alla reella x .

2. Formeln stämmer då $n = 1$: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Under induktionssteget skall man visa att $-\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} = -\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

3. Man får $\ln(x-4)^2 = \ln(2x)$, varav $(x-4)^2 = 2x$. Denna andragradsekvation har de två olika lösningarna $x = 8$ och $x = 2$. Men lösningen $x = 2$ *duger icke*, ty då blir $x - 4$ negativ, och $\ln(-2)$ går inte att definiera som ett reellt tal. Det enda svaret blir alltså $x = 8$.