KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 2A
onsdagen den 5 november 2008 klo 13.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Skissa hela grafen till funktionen $x\sqrt{2-x^2}$. Avgör speciellt om (och i så fall var) funktionen har några lokala maxima eller lokala minima.

2. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = 5\sin t\,, \quad y = y(t)\,.$$

3. Definiera standard-inversen till tangens-funktionen samt beräkna derivatan till denna invers.

SVAR: **1.** Låt $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$. Då är derivatan $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}(1-x^2)$ noll precis då $x = \pm 1$, vilket ger lägena för funktionens max och min. Funktionen är bara definierad då $x^2 \le 2$, och den har tre nollställen på detta intervall: $x = \pm\sqrt{2}$, samt $x = 0$. Grafen ser ut som ett liggande S.

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 2 = 0$ har lösningarna $r = -1 \pm i$, vilket ger den homogena lösningen $y_h = C_1\,\mathrm{e}^{(-1+i)t} + C_2\,\mathrm{e}(-1-i)t) = (A\cos t + B\sin t)\,\mathrm{e}^{-t}$, där C_1, C_2, A och B är godtyckliga konstanter. För att få en partikulärlösning ansätter man $y = E\cos t + F\sin t$, där konstanterna E och F *inte* är godtyckliga, utan måste *bestämmas*. Insättning i ekvationen ger $E = -2$ och $F = 1$, varav $y_p = \sin t - 2\cos t$, och den allmänna lösningen $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

3. Standard-inversen till funtionen $y = \tan x$ heter arcus-tangens och skrivs $x = \arctan y$. Den är definierad för alla reella y och antager alla $x-$värden med $-\pi/2 < x < \pi/2$. Dess derivata beräknas medelst informationen att

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$ till

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d}{dy}\arctan y = \dfrac{1}{dy/dx} = \dfrac{1}{1+y^2}\,.$

KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 2B
onsdagen den 5 november 2008 klo 13.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Hela cosinus-funktionen går inte att invertera. (Varför?). Det finns dock en standard-invers, som inverterar "så mycket som möjligt" av cosinus-funktionen. Vilka värden antager denna invers, och för vilka argument är den definierad? Huvuduppgiften består i att beräkna derivatan av denna standard-invers.

2. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + y = 4\cos t + 2\sin t\,, \quad y = y(t)\,.$$

3. Skissa grafen till funktionen $(x^2-2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Avgör speciellt om (och i så fall var) funktionen har några lokala maxima eller lokala minima.

SVAR: **1.** Funktionen cosinus oscillerar hela tiden och antager alla sina reella funktionsvärden oändligt många gånger. Om man *inskränker* $\cos x$ till intervallet $0 \le x \le \pi$, så antager $y = f(x) = \cos x$ varje funktionsvärde precis *en gång* och kan därmed inverteras. Denna standard-invers kallas arcus-cosinus, $x = \arccos y$. Den är definierad då $-1 \le y \le 1$ och antager $x-$ värdena i intervallet ovan.

Eftersom $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-y^2}$, så blir

$$\frac{d}{dy}\arccos y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{(dy/dx)} = \frac{1}{(-\sqrt{1-y^2})} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2+2r+1=0$ har dubbelroten $r=-1$, vilket ger den homogena lösningen $y_h = (A+B\,t)\,\mathrm{e}^{-t}$, där A och B är godtyckliga konstanter. För att få en partikulärlösning ansätter man $y = G\,\cos t + H\,\sin t$, där konstanterna E och F *inte* är godtyckliga, utan måste *bestämmas*. Insättning i ekvationen ger $G=-1$ och $H=2$, så $y_p = 2\sin t - \cos t$, och allmän lösning $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

3. Låt $g(x) = (x^2-2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ med $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. Då är derivatan $g'(x) = x\,(4-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ noll precis då $x=0$ eller $x=\pm 2$, vilket ger lägena för funktionens max och min. Funktionen är definierad för alla reella x och har två rella nollställen: $x = \pm\sqrt{2}$. Den har ett lokalt och globalt minimum $g(0) = -2$ då $x=0$, samt två lokala och globala maxima då $x = \pm 2$.
Grafen ser ut som en flygande fiskmås på långt håll.