KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 3A
måndagen den 1 december 2008 klo 10.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Beräkna arean för området $D \ : \ 0 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $0 \leq x \leq 1$.

2. Kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roterar ett varv kring x-axeln. Bestäm den uppkomna kroppens volym.

3. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

SVAR: **1.** Arean av $D = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \Big\{ u = \sqrt{x} \ , \ x = u^2 \ , \ dx = 2u\,du \Big\} =$

$$= \int_0^1 \frac{u}{u^2+1}\,2u\,du = 2 \int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,du = \ \cdots \ = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du =$$

$$= 2 - 2\Big[\arctan u\Big]_0^1 = 2 - 2\arctan 1 = 2 - 2\,\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2} \,.$$

2. Med $y = f(x) = \sin x$ blir rotationsvolymen $V = \displaystyle\int_0^\pi \pi\, f^2(x)\,dx =$

$$= \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}\,(\,1 - \cos 2x\,)\,dx = \ \cdots \ = \pi\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \,.$$

3. Integrandens nämnare har nollställena -2 och -3, vilket ger faktoriseringen $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$ med enkel partialbråksutveckling: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6} =$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\,dx = \Big[\ln(x+2) - \ln(x+3)\Big]_0^\infty = \left[\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\right]_0^\infty = -\ln\frac{2}{3} =$$

$$= \ln(3/2)\,.$$

KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1

Kontrollskrivning 3B

måndagen den 1 december 2008 klo 10.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Kurvan $y = \ln x$, $0 \le x \le 1$, roterar ett varv kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.

2. Bestäm arean för området $\Omega\ :\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$, $0 \le y \le \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

3. Beräkna längden av kurvan $y = x\sqrt{x}$, $0 \le x \le \dfrac{20}{3}$.

SVAR: **1.** Med partiell integration blir volymen $V = \displaystyle\int_0^1 \pi \ln^2 x\, dx = \pi J$, där

$$J = \int_0^1 1 \ln^2 x\, dx = \Big[x \ln^2 x\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,(2\ln x)\frac{1}{x}\, dx = 0 - \int_0^1 2\ln x\, dx =$$

$$= -\Big[2x \ln x\Big]_0^1 + \int_0^1 2x\frac{1}{x}\, dx = 0 + \int_0^1 2\, dx = 2$$, där $x \ln x$ och $x \ln^2 x$ båda $\to 0$ då $x \to 0+$. Alltså $V = 2\pi$.

2. Arean blir $$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx = \int_0^{\pi/3} \tan x \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \Big\{u = \tan x\ ,\ du = \frac{dx}{\cos^2 x}\Big\} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} u\, du = \Big[\frac{1}{2}\, u^2\Big]_0^{\sqrt{3}} = \Big[\frac{1}{2}\,(\tan x)^2\Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(3-0) = \frac{3}{2}\, .$$

3. Med $y = f(x) = x\sqrt{x} = x^{1/3}$ blir $1 + f'(x)^2 = 1 + \Big(3\sqrt{x}/2\Big)^2 = 1 + 9\,x/4$, och längden $$L = \int_0^{20/3} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^{20/3} \sqrt{1 + 9\,x/4}\, dx = \{\ u = 1 + 9\,x/4\ ,$$

$$du = 9\, dx/4\ \} = \int_1^{16} \sqrt{u}\,(4/9)\, du = \Big[\frac{4}{9}\,\frac{2}{3}\,\sqrt{u}^{\,3}\Big]_1^{16} = \frac{8}{27}\,(64-1) = \ \cdots\ = \frac{56}{3}\, .$$