KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 4A
torsdagen den 11 december 2008 klo 13.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. För vilka x är följande summa konvergent? Beräkna seriens summa i så fall. Förenkla svaret. Summan är $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(1+x)^{-j}$.

2. Beräkna $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$. Glöm inte att motivera Ditt svar ordentligt!

3. Låt $b \neq 0$. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

SVAR: **1.** Serien konvergerar då utvecklingsparametern $\dfrac{1}{1+x}$ till sitt belopp är mindre än 1 , eller $|\,1+x\,| > 1$, dvs x positiv eller $x < -2$.

Summan blir då $\displaystyle\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-(\frac{1}{1+x})} = \frac{1}{1+x-1} = \frac{1}{x}$.

2. Termen kan skrivas $a_m = \ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right) = \ln(m+1) - \ln m$, vilket ger delsumman

$$S_N = \sum_{m=2}^{N} a_m = \sum_{m=2}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) = \sum_{m=2}^{N}\ln(m+1) - \ln m = \ln(N+1) - \ln 2\,,$$

som går mot ∞ då $N \to \infty$. Summan divergerar alltså mot oändligheten.

3. Låt B betyda *olika* begränsade funktioner nedan. Medelst Taylorutvecklingen $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + t^4\,B(t)$ fås

$$\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \frac{1-\left(1-\frac{(ax)^2}{2}+x^4\,B(x)\right)}{1-\left(1-\frac{(bx)^2}{2}+x^4\,B(x)\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{(ax)^2}{2}+x^4\,B(x)}{-\frac{(bx)^2}{2}+x^4\,B(x)} = \frac{a^2+x^2\,B(x)}{b^2+x^2\,B(x)}\,,$$

vilket går mot $\dfrac{a^2}{b^2}$, då $x \to 0$.

KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 4B
torsdagen den 11 december 2008 klo 13.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Beräkna $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$. Glöm inte att motivera Ditt svar ordentligt!

2. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x^2)-\exp(-x^2)}{\left(\exp x-\exp(-x)\right)^2}$.

Här har vi skrivit $\exp t$ i stället för e^t för tydlighets skull.

3. För vilka x är följande summa konvergent? Beräkna seriens summa i så fall. Förenkla svaret. Summan är $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(1-x)^m$.

SVAR: **1.** Summan blir $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$. (Skriv ut delsumman S_N explicit och se hur termerna tager ut varandra, alla utom fyra små bråk.)

2. Gränsvärdet är $\dfrac{1}{2}$. Varning: $(e^{x})^2$ är ICKE LIKA MED e^{x^2}.

3. Konvergent precis då $|1-x|<1$, dvs $0<x<2$. Summan blir $\dfrac{1-x}{x}$.