

Tentamenskrivning, 2009-03-09, kl. 08.00-13.00

SF1625, envariabel analys för CINTe1(IT) och CMIE1(ME) (7,5hp)

Preliminära gränser. Registrerade på kursen SF1625 får graderat betyg enligt skalan A (högsta betyg), B, C, D, E (lägsta godkända betyg), F (underkänt). Betygsgränserna är

26-28p för betyg A; 23-25p för betyg B; 20-22p för betyg C; 17-19p för betyg D; 14-16p för betyg E.

Den som fick 13p får tillfälligt betyg Fx som kan kompletteras till betyg E. Om kompletteringen misslyckas förvandlas betyget Fx till F. Kontakta i så fall läraren!

De som är redan registrerade på 5B1147 får betyg 5, 4, 3, K, U enligt det gamla systemet. Betygsgränserna då är 26p för betyg 5; 22p för betyg 4; 14p för betyg 3. Den som fick 13p får tillfälligt att kompletteras till betyg 3

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningförslaget skall textförklaras. Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (Kladdpaper skall inte lämnas in.) Inga hjälpmedel!

Den som blivit godkänd på KS X , $1 \leq X \leq 4$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X , så skall motsvarande tal X inte räknas om.

3-poängsuppgifter

1. Låt $f(x) = \frac{\sin x}{x} + A \arctan x + B$.

Bestäm konstanterna A och B så att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

2. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$.

3. En behållare full med en viss vätska har formen av den kropp som uppstår då det ändliga område som begränsas av $y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}$, $0 \leq x \leq 1$ roterar ett varv kring x -axeln. I nedersta del av behållaren finns en kran som släpper ut vätskan med 1 v.e/s. Hur lång tid tar det att tömma ut behållaren ?

4. Använd t ex uppskattning av summor med integraler för att finna minsta antal termer i serier $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^5}$ som behövs för att approximera summan med ett fel $\leq \frac{1}{4} 10^{-4}$.

Var god vänd

4-poängsuppgifter

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 2$ som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

6. Bestäm *arean* av området $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{4 \cos x}{4 - \sin^2 x} \right\}$

(Tips sätt $t = \sin x$ i integralen).

7. Låt $f(x) = e^x + e^{-x} - x$.

(a) Bestäm funktionens eventuella stationära punkter.

(b) Har funktionen ett minsta värde?. Bestäm i så fall i vilken punkt detta värde antas.

8. Antag att $f(0) = 2, f'(0) = 1, f'(1) = 0$ samt att $\int_0^1 f(x)e^x dx = \int_0^1 f''(x)e^x dx$. Beräkna $f(1)$.

Tentamenskrivning, 2009-03-09, kl. 08.00-13.00

SF1625, envariabel analys för CINTe1(IT) och CMIE1(ME) (7,5hp)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + A \arctan x + B \right) = 1 + A \cdot 0 + B = 1 + B$

så att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 + B \Leftrightarrow B = 2$. Vidare, så är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x} + A \arctan x + 2 \right) = 0 + A \cdot \frac{\pi}{2} + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \text{ ty enligt instängningsregeln är } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\text{så att } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow A \frac{\pi}{2} + 2 \Leftrightarrow A = \frac{-4}{\pi}$$

$$\text{svar } A = \frac{-4}{\pi}, B = 2$$

2. Funktionen $f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x$, är kontinuerlig på det kompakta intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och således antar sitt största och minsta värde på $-1 \leq x \leq 1$

I Ändpunkterna är $f(-1) = \sqrt{2} + \arcsin(-1) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ och $f(1) = 0 + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

I det inre är $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$. Detta ger ev stationära punkter då

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 2\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2}. \text{ Kvadrering ger}$$

$$4(1-x) = 1-x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, 3.$$

Insättning i $2\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2}$ ger att endast $x = 1$ är den lösningen. Men denna ligger inte i intervallet $-1 < x < 1$. Således f saknar stationära punkter.

Svar minsta värdet $f(-1) = \sqrt{2} + \arcsin(-1) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ och största värdet

$$f(1) = 0 + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Den sökta volymen är

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} \right) dx + \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$\pi \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2} \right]_0^1 + \pi [\arctan x]_0^1 = \pi(\ln \sqrt{2} + \pi/4)$$

Svar det tar $\pi(\ln \sqrt{2} + \pi/4)$ sec.

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^5} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^5} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^5}.$$

$$\text{Restermen } \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^5} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{1+x^5} dx \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{4x^4} \right]_n^N = \frac{1}{4n^4}.$$

$$\text{Vi vill ha } \frac{1}{4n^4} < \frac{1}{4 \cdot 10^4} \Rightarrow n > 10.$$

Vi kan ta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^5} = \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{1+k^5} \pm \frac{1}{3} 10^{-3}$$

5. Vi löser den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$$\text{Detta betyder att } y_h(x) = e^x (C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)).$$

Pga att höger ledet $\sin x$ är inte en lösning till den homogena delen så ansätter vi som en partikulär lösning

$$y_p(x) = Bx^2 + Cx + D. \text{ Det följer}$$

$$y_p'(x) = 2Bx + C, y_p''(x) = 2B \text{ och in i den givna differentialekvationen}$$

$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 2$$

Vi får

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = 2Bx^2 + (-4B + 2C)x + 2B - 2C + D$$

Vilket ger ekvationsystemet

$$\begin{cases} 2B = 2 \\ -4B + 2C = 0 \\ 2B - 2C + D = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = 2 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alltså är } y_p(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{Delsvar: } y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x (C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)) + x^2 + 2x$$

Använd $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$ för att bestämma C_1 och C_2 .

$$y(0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Vi derivera } y(x) = e^x (C_1 \sin(x)) + x^2 + 2x \quad y' = e^x (C_1 \cos(x)) + e^x (C_1 \sin(x)) + 2x + 2.$$

som ger

$$y'(0) = (C_1) + 2 = 0 \Rightarrow C_1 = -2$$

$$\text{Svar } y(x) = -2 \sin x e^x + x^2 + 2x$$

$$6. \text{ Vi söker } \textit{Arean} = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \cos x}{4 - \sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{4}{4-t^2} dt = \int_0^1 \frac{4}{(2-t)(2+t)} dt$$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{4}{4-t^2} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2+t} = \frac{A(2+t) + B(2-t)}{4-t^2} = \frac{2A + 2B + t(A-B)}{4-t^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ 2(A + B) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Integralen blir då

$$\int_0^1 \frac{4}{4-t^2} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t} \right) dt = [-\ln(2-t) + \ln(2+t)]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) \right]_0^1 = \ln 3 > 0$$

Svar *Arean* $\ln 3$ (a.e)

7. (a) $f'(x) = e^x - e^{-x} - 1$ och $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} - 1 = 0$. Med variabelbytet $t = e^x$ (och kravet $t > 0$) blir detta en andragradsekvation

$$t - t^{-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Eftersom } t = e^x > 0 \text{ ger detta } e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

(b) Vi gör en teckenstudie av derivatan

x		$\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	$f\left(\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right)$	\nearrow

Från tabellen drar vi slutsatsen att $f_{\min} = f\left(\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right)$.

8. Enligt förutsättningarna gäller att

$$\int_0^1 f(x)e^x dx = \int_0^1 f''(x)e^x dx = [\text{partiell integration}] = [f'(x)e^x]_0^1 - \int_0^1 f'(x)e^x dx = [\text{partiell}$$

$$\text{integration}] = [f'(x)e^x]_0^1 - [f(x)e^x]_0^1 + \int_0^1 f(x)e^x dx =$$

$$= f'(1)e - f'(0) - f(1)e + f(0) + \int_0^1 f(x)e^x dx.$$

Det följer att $0 = f'(1)e - f'(0) - f(1)e + f(0)$ och $f(0) = 2, f'(0) = 1, f'(1) = 0$ ger

$$0 = -1 - f(1)e + 2 \Leftrightarrow f(1) = e^{-1}$$

Svar $f(1) = e^{-1}$

