KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 1A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Låt $g(t)$ vara en deriverbar envariabelsfunktion. Visa att tvåvariabelsfunktionen $f(x,y) = g(2x-y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Lösning:

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot g'(2x-y^2) \cdot 2 + g'(2x-y^2) \cdot (-2y) = 0.$$

2. *Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3 - xyz + yz^2 - z^3 = 0$ i punkten $(1,1,1)$.*

Lösning: $\operatorname{grad}(x^3 - xyz + yz^2 - z^3) = (3x^2 - yz, -xz + z^2, -xy + 2yz - 3z^2)$ blir i punkten $(1,1,1)$ lika med $(2,0,-2) = 2(1,0,-1)$. Så i denna punkt får vi normalvektorn $\boldsymbol{n} = (1,0,-1)$, som sedan ger tangentplanet

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{n}\cdot((x,y,z) - (1,1,1)) = (1,0,-1) \cdot (x-1, y-1, z-1) \\ &= x - 1 - z + 1 = x - z, \end{aligned}$$

det vill säga $x - z = 0$.

3. *Inför polära koordinater i högra halvplanet* $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ *genom*

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi = \arctan\frac{y}{x}, \end{cases}$$

där $0 < r < \infty$ *och* $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. *Härigenom kan en funktion* $f \colon H \to \mathbb{R}$ *uppfattas antingen som en funktion av* x *och* y *eller som en funktion av* r *och* ϕ. *Visa att*

$$r\,\frac{\partial f}{\partial r} = x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} r\,\frac{\partial f}{\partial r} &= r\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = r\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\cos\phi + r\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\sin\phi \\ &= x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$