KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 1B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Låt $g(t)$ vara en deriverbar envariabelsfunktion. Visa att tvåvariabelsfunktionen $f(x,y) = g(x^2y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen*
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

   Lösning:
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot g'(x^2y^2) \cdot 2xy^2 - y \cdot g'(x^2y^2) \cdot (2x^2y) = 0.$$

2. *Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $(x+1)(y+2)(z+1) = 18$ i punkten $(2,1,1)$.*

   Lösning: $\operatorname{grad}((x+1)(y+2)(z+1)) = ((y+2)(z+1), (x+1)(z+1), (x+1)(y+2))$ blir i punkten $(2,1,1)$ lika med $(6,6,9) = 3(2,2,3)$. Så i denna punkt får vi normalvektorn $\boldsymbol{n} = (2,2,3)$, som sedan ger tangentplanet
$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{n} \cdot ((x,y,z) - (2,1,1)) = (2,2,3) \cdot (x-2, y-1, z-1) \\ &= 2(x-2) + 2(y-1) + 3(z-1) = 2x + 2y + 3z - 9, \end{aligned}$$

   det vill säga $2x + 2y + 3z = 9$.

3. *Inför polära koordinater i högra halvplanet* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ *genom*

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \phi = \arctan\frac{y}{x}, \end{cases}$$

där $0 < r < \infty$ *och* $-\pi/2 < \phi < \pi/2$*. Härigenom kan en funktion* $f \colon H \to \mathbb{R}$ *uppfattas antingen som en funktion av* x *och* y *eller som en funktion av* r *och* ϕ*. Visa att*

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \phi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\,\sin\phi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\,\cos\phi \\ &= -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$