KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 2A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Visa att funktionen

$$f(x,y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3$$

har två stationära punkter, och undersök sedan vilka typer av stationära punkter det är frågan om (det vill säga lokalt max, lokalt min, eller sadelpunkt).

Lösning: Stationära punkterna är lösningar till systemet

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 6x + 3y = 3(y + 2x), \\ 0 = f'_y = 3x + 2y + 3y^2. \end{cases}$$

$y = -2x$ insatt i andra ekvarionen $\Longrightarrow$

$$0 = 3x - 4x + 12x^2 = 12x(x - 1/12) \iff x = \begin{cases} 0, \\ 1/12 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ stationära punkterna $(0,0)$ och $(1/12, -1/6)$. Typen bestäms av andraderivatorna:

$$f''_{xx} = 6, \quad f''_{xy} = 3, \quad f''_{yy} = 2 + 6y.$$

Punkten $(0,0)$:

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= 6h^2 + 6hk + 2k^2 = 2(k^2 + 3hk + 3h^2) \\ &= 2\left(\left(k + \frac{3}{2}h\right)^2 - \frac{9}{4}h^2 + 3h^2\right) = 2\left(\left(k + \frac{3}{2}h\right)^2 + \frac{3}{4}h^2\right) \\ &= \text{ positivt definit } \Longrightarrow \text{lokalt minimum.} \end{aligned}$$

Punkten$(1/12, -1/6)$:

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= 6h^2 + 6hk + k^2 = (k+3h)^2 - 9h^2 + 6h^2 = (k+3h)^2 - 3h^2 \\ &= \text{indefinit} \implies \text{ sadelpunkt.} \end{aligned}$$

2. Bestäm en normalvektor till ytan

$$\boldsymbol{r} \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, z) = (s\cos t, s\sin t, s^2), \quad \text{där} \quad 0 \le s \le 2,\ 0 \le t \le 2\pi,$$

i punkten $\boldsymbol{r_0} = (0, 1, 1)$.

Lösning: Punkten $(0, 1, 1)$ fås då $s = 1$, $t = \pi/2$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = (\cos t, \sin t, 2s) \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(1, \pi/2) = (0, 1, 2);\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = (-s\sin t, s\cos t, 0) \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(1, \pi/2) = (-1, 0, 0)\\
&\Longrightarrow \text{ normalvektorn } \boldsymbol{n} = (0, 1, 2) \times (-1, 0, 0)\\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2, 1).
\end{aligned}$$

3. Visa att nivåytan

$$f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^5 + y^3 + z^4 - (x^2 + y^2)z = 1$$

kan uppfattas som grafen av en funktion $z = z(x, y)$ nära punkten $(1, 1, 1)$, samt beräkna de partiella derivatorna

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1).$$

Lösning: $f(1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 - (1 + 1) \cdot 1 = 1 \Longrightarrow (1, 1, 1)$ ligger på ytan.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4z^3 - (x^2 + y^2) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

$\Longrightarrow z$ kan lösas ut ur $f(x, y, z) = 1$ som $z = z(x, y)$ nära punkten $(1, 1, 1)$. Differentiering av $1 = f(x, y, z)$ ger

$$0 = 5x^4\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz - (2x\,dx + 2y\,dy)z - (x^2 + y^2)\,dz.$$

Då $x = y = z = 1$ fås

$$\begin{aligned}
&0 = 3\,dx + dy + 2\,dz \iff dz = -\frac{3}{2}\,dx - \frac{1}{2}\,dy \Longrightarrow\\
&\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$