KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 2B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Visa att funktionen

$$f(x,y) = x^2 + x^3 + 3xy + 3y^2$$

har två stationära punkter, och undersök sedan vilka typer av stationära punkter det är frågan om (det vill säga lokalt max, lokalt min, eller sadelpunkt).

Lösning: Stationära punkterna är lösningar till systemet

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 2x + 3x^2 + 3y, \\ 0 = f'_y = 3x + 6y = 3(x + 2y). \end{cases}$$

$x = -2y$ insatt i första ekvarionen $\Longrightarrow$

$$0 = -4y + 12y^2 + 3y == 12y(y - 1/12) \iff y = \begin{cases} 0, \\ 1/12 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ stationära punkterna $(0,0)$ och $(-1/6, 1/12)$. Typen bestäms av andraderivatorna:

$$f''_{xx} = 2 + 6x, \quad f''_{xy} = 3, \quad f''_{yy} = 6.$$

Punkten $(0,0)$:

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= 2h^2 + 6hk + 6k^2 = 2(h^2 + 3hk + 3k^2) \\ &= 2\left(\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + 3k^2\right) = 2\left(\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right) \\ &= \text{ positivt definit } \Longrightarrow \text{lokalt minimum.} \end{aligned}$$

Punkten$(-1/6, 1/12)$:

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= h^2 + 6hk + 6k^2 = (h + 3k)^2 - 9k^2 + 6k^2 = (h + 3k)^2 - 3k^2 \\ &= \text{indefinit } \Longrightarrow \text{ sadelpunkt.} \end{aligned}$$

2. Bestäm en normalvektor till ytan

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r} \overset{\text{def}}{=} (x, y, z) = ((2 - \cos t)\cos s, (2 - \cos t)\sin s, \sin t), \\ &\text{där} \quad -\pi \le s \le \pi, \ -\pi \le t \le \pi, \end{aligned}$$

i punkten $\boldsymbol{r_0} = (1, \sqrt{3}, 1)$.

Lösning: Punkten $(1, \sqrt{3}, 1)$ fås då $s = \pi/3$, $t = \pi/2$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = (-(2 - \cos t)\sin s, (2 - \cos t)\cos s, 0) \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(\pi/3, \pi/2) = (-\sqrt{3}, 1, 0);$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = (\sin t \cos s, \sin t \sin s, \cos t) \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(\pi/3, \pi/2) = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$$
$$\Longrightarrow \text{ normalvektorn } \boldsymbol{n} = (-\sqrt{3}, 1, 0) \times (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2).$$

3. Låt

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

och

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + 4t_2 \\ -2t_1 + 2t_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}).$$

Bestäm funktionalmatrisen för sammansättningen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))$.

Lösning:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 + 8t_2 & -4t_1 + 4t_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))\,\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} 2t_1 + 8t_2 & -4t_1 + 4t_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10t_1 & 40t_2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$