KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 3A

i SF1626 Flervariabelanalys för E och M, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.
- E:s resultat sätts upp på anslagstavlan utanför Q31.

1. Beräkna
$$\mathcal{I} = \iint_D (y - x^2)\, dxdy,$$
där $D = \{(x, y) \colon 2x^2 \leq y \leq 2\}$.

Lösning:
$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=2x^2}^{2} (y - x^2)\, dy \right) dx = \int_{x=-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2} - x^2 y \right]_{y=2x^2}^{2} \\
&= \int_{x=-1}^{1} (2 - 2x^2 - 2x^4 + 2x^4)\, dx = 2 \cdot 2 \cdot \int_{x=0}^{1} (1 - x^2)\, dx \\
&= 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

2. Beräkna
$$\mathcal{I} = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$
där $D = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 3, 0 \leq y \leq x\}$.

Lösning:
$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \int_{\phi=0}^{\pi/4} r \cdot r\, dr d\phi = \int_0^{\sqrt{3}} r^2\, dr \cdot \int_0^{\pi/4} d\phi \\
&= \frac{1}{3} \left[r^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

3. Beräkna

$$\mathcal{I} = \iiint_K z\,dxdydz,$$

där K är den del av enhetsklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ som ligger innanför den kon vars spets ligger i origo, vars axel sammanfaller med positiva z-axeln, och som bildar vinkeln $\pi/6$ med denna axel.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi/6} \int_{\phi=0}^{2\pi} r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\,drd\theta d\phi \\
&= \int_0^1 r^3\,dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin\theta \cdot \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/6} \cdot 2\pi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$