KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 3B

i SF1626 Flervariabelanalys för E och M, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.
- E:s resultat sätts upp på anslagstavlan utanför Q31.

1. Beräkna
$$\mathcal{I} = \iint_D \frac{2}{1+x^2}\,dxdy,$$
där D är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,2)$ och $(0,2)$.

Lösning:
$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{x=0}^{2} \frac{2}{1+x^2}\left(\int_{y=x}^{2} dy\right)dx = \int_0^2 \frac{2(2-x)}{1+x^2}\,dx \\ &= 4\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^2 \frac{2x}{1+x^2} = 4[\arctan x]_0^2 - \left[\ln(1+x^2)\right]_0^2 \\ &= 4\arctan 2 - \ln 5.\end{aligned}$$

2. Beräkna
$$\mathcal{I} = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy,$$
där $D = \{(x,y)\colon 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le y \le x\}$.

Lösning:
$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{r=1}^{3}\int_{\phi=0}^{\pi/4} e^{r^2}\cdot r\,drd\phi = \frac{1}{2}\int_1^3 e^{r^2}\cdot 2r\,dr\cdot\int_0^{\pi/4} d\phi \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{r^2}\right]_1^3\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\left(e^9 - e\right).\end{aligned}$$

3. Beräkna

$$\mathcal{I} = \iiint_K \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

där $K = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \geq 1,\ x > 0\}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{r=1}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi}{r^4} \\
&= \int_1^{\infty} r^{-2}\, dr \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi = \left[-\frac{1}{r}\right]_1^{\infty} \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot \pi \\
&= 1 \cdot (1+1) \cdot \pi = 2\pi.
\end{aligned}$$