KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 4A

i SF1626 Flervariabelanalys för E och M, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.
- E:s resultat sätts upp på anslagstavlan utanför Q31. Skrivningarna hämtas på Matematiks studentexpedition.

1. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ på det triangulära området $T = \{(x, y)\colon 0 \leq x \leq 1,\ 2x \leq y \leq 2\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:*

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4 \Longrightarrow x = 1 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 \Longrightarrow y = 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (1, 2) \in \text{ randen.}$$

Randen:

(a) $y = 2x$, $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x, 2x) = 2x^2 - 4x + 4x^2 - 8x + 1 = 6x^2 - 12x + 1 = g(x);$$
$$0 = g'(x) = 12x - 12 \iff x = 1.$$
$$g(0) = f(0, 0) = 1, \quad g(1) = f(1, 2) = -5.$$

(b) $y = 2$, $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x, 2) = 2x^2 - 4x + 4 - 8 + 1 = 2x^2 - 4x - 3 = h(x);$$
$$0 = h'(x) = 4x - 4 \iff x = 1.$$
$$h(0) = f(0, 2) = -3, \quad h(1) = f(1, 2) = -5.$$

(c) $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$:

$$f(0, y) = y^2 - 4y + 1 = k(y);$$
$$0 = k'(y) = 2y - 4 \iff y = 2.$$
$$k(0) = f(0, 0) = 1, \quad k(2) = f(0, 2) = -3.$$

STÖRST: $f(0,0) = 1$, MINST: $f(1,2) = -5$.

2. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 3x + 4y$ på enhetscirkeln $\{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$.

   Lösning: $\operatorname{grad}(3x + 4y) = (3,4)$, $\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - 1) = (2x, 2y) \Longrightarrow$ Lagrangesystemet

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

   Första ekvationen visar att $6y - 8x = 0 \iff y = 4x/3$; detta insatt i 2:a ekvationen ger

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25}{9}x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{3}{5} \Longrightarrow y = \pm\frac{4}{5}.$$

   STÖRST: $3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25}{5} = 5$, MINST: -5.

3. Låt γ vara närmaste vägen från origo till punkten (a,b). Beräkna kurvintegralen

$$\mathcal{I} = \int_\gamma 4(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy).$$

   Ledning: Finns en potentialfuktion?

   Avgör också huruvida denna integral är oberoende av vägen mellan origo och (a,b).

   Lösning: En eventuell potentialfunktion U är lösning till systemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3. \end{cases}$$

   Första ekvationen visar att $U = x^4 + 2x^2y^2 + g(y)$; insatt i den andra fås

$$4x^2y + g'(y) = 4x^2y + 4y^3 \Longrightarrow g(y) = y^4 + C,$$

   så U finns och kan väljas som $U = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$. Därmed blir $\mathcal{I} = U(a,b) - U(0,0) = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ – som bara beror på U:s värden i slut- och begynnelsepunkterna, och inte på vägen mellan dessa.