KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 4B

i SF1626 Flervariabelanalys för E och M, vt 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.
- E:s resultat sätts upp på anslagstavlan utanför Q31. Skrivningarna hämtas på Matematiks studentexpedition.

1. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ på det triangulära området $T = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$.

   Lösning: *Inre stationära punkter:*

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4 - 8y \Longrightarrow y = 1/2$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -8x + 2 \Longrightarrow x = 1/4.$$

$$f(1/4, 1/2) = 1 - 1 + 1 + 1 = 2.$$

   Randen:

   (a) $y = 0$, $0 \le x \le 1$:

$$f(x, 0) = 4x + 1 = \text{ växande}; \quad f(0, 0) = 1,\ f(1, 0) = 5.$$

   (b) $y = 1 - x$, $0 \le x \le 1$:

$$f(x, 1 - x) = 4x - 8x(1 - x) + 2(1 - x) + 1 = 8x^2 - 6x + 3 = g(x);$$
$$0 = g'(x) = 16x - 6 \iff x = 3/8.$$
$$g(0) = f(0, 1) = 3, \quad g(3/8) = f(3/8, 5/8) = 15/8, \quad g(1) = f(1, 0) = 5.$$

   (c) $x = 0$, $0 \le y \le 1$:

$$f(0, y) = 2y + 1 = \text{ växande};$$
$$f(0, 0) = 1, \quad f(0, 1) = 3.$$

   STÖRST: $f(1, 0) = 5$, MINST: $f(0, 0) = 1$.

2. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy$ på ellipsen

$$\left\{(x,y)\colon \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1\right\}.$$

Lösning: $\operatorname{grad}(xy) = (y,x)$, $\operatorname{grad}(x^2/8 + y^2/2 - 1) = (x/4, y) \Longrightarrow$ Lagrangesystemet

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} y & x \\ x/4 & y \end{pmatrix} = 0, \\ x^2/8 + y^2/2 = 1 \end{cases}$$

Första ekvationen visar att $y^2 - x^2/4 = 0 \iff x^2 = 4y^2 \iff x = \pm 2y$. Detta insatt i 2:a ekvationen ger

$$\frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \iff y^2 = 1 \iff y = \pm 1 \Longrightarrow \text{ punkterna } (\pm 2, \pm 1).$$

STÖRST: $f(2,1) = f(-2,-1) = 2$, MINST: $f(2,-1) = f(-2,1) = -2$.

3. Låt γ vara kvartscirkelbågen $\{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ från $(1,0)$ till $(0,1)$. Beräkna kurvintegralen

$$\mathcal{I} = \int_\gamma (xy\,dx + (x^2 + y^3)\,dy.$$

Ledning: Slut kurvan och använd Green.

Lösning: Med α =linjestycket från $(0,1)$ till $(0,0)$, β = linjestycket från $(0,0)$ till $(1,0)$ och $D = \{(x,y)\colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 0\}$ ger Green att

$$\oint_{\alpha+\beta+\gamma} xy\,dx + (x^2 + y^3)\,dy = \iint_D (2x - x)\,dxdy = \iint_D x\,dxdy.$$

Därmed blir

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \int_\gamma &= \iint_D x\,dxdy - \int_{y=1}^{0} y^3\,dy - \int_{x=0}^{1} 0\,dx \\ &= \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{\pi/2} r\cos\phi \cdot r\,dr d\phi + \left[y^4/4\right]_0^1 \\ &= \left[r^3/3\right]_0^1 \cdot [\sin\phi]_0^{\pi/2} + 1/4 = 1/3 + 1/4 = 7/12. \end{aligned}$$