KTH Matematik

SF 1626 Flervariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 1A
måndagen den 2 februari 2009 klo 10.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Vilka värden kan riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = -x^2 + 2\,y^2 - 3\,z^2 + 4$ antaga i punkten $(2,1,1)$ för olika riktningar?

2. Visa att funktionen $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\,h\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, $x > 0$, $y > 0$, löser den partiella differentialekvationen $x\,\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial g}{\partial y} + g = 0$.

3. Bestäm talet d så att planet $x + 2y + 2z = d$ tangerar ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

SVAR: **1.** Gradienten är allmänt $\nabla f = (-2x, 4y, -6z)$ och i vår punkt $(-4, 4, -6)$ med längd (belopp) $|\nabla f| = \sqrt{68}$. Riktningsderivatan i riktning ν , där ν är en enhetsvektor, kan därför antaga alla värden mellan $-\sqrt{68}$ och $\sqrt{68}$.

2. Med beteckningarna $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}\,h\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, $g_x = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, $g_y = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ kan vi skriva $g_x = -\dfrac{1}{2x}\,g(x,y) + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}\,h'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)\Big(\dfrac{-y}{x^2}\Big)$ och motsvarande för g_y .

3. Planet har normal $\mathbf{n}_1 = (1,2,2)$ och ytans normal ges av gradienten $\mathbf{n}_2 = (2x, 2y, 2z)$. När planet tangerar ytan måste de vara parallella, varav $z = y = 2x$. Insatt i sfärens ekvation ger detta $x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 9$, varav $x = \pm 1$ och $d = \pm 9$.

KTH Matematik

SF 1626 Flervariabelanalys för M1

Kontrollskrivning 1B

måndagen den 2 februari 2009 klo 10.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Under vilken vinkel skär linjen $\mathbf{r} = (7,3,-2) + t\,(3,4,0)\,, t \in \mathbf{R}\,,$ planet $-x + 2y - 2z = 5\,?$

2. Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = \mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ i den punkt där $(x,y) = (2,1)$.

3. Avgör huruvida funktionen $h(x,y) = \dfrac{1}{r}\,f(\theta)$ löser den pariella differentialekvationen $x\,h_x + y\,h_y + h = 0$. Här är $h_x = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ etc och (r,θ) är polära koordinater.

SVAR: **1.** Linjen har riktning $\mathbf{v} = (3,4,0)$ och planet har normal $\mathbf{n} = (-1,2,-2)$. Vinkeln α dem emellan ges av $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{n}|} = 1/3$, varav $\alpha = \arccos(1/3)$. Den sökta vinkeln är $\varphi = \pi/2 - \alpha = \arcsin(1/3)$.

2. Funktionen $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ har gradient $\nabla f = (-2x,-4y)\,f(x,y)$, vilket i den givna punkten blir $(-4,-4)\,\mathrm{e}^{-6}$. Med $z_0 = f(2,1) = \mathrm{e}^{-6}$ kan vi skriva tangentplanets ekvation $z - z_0 = z - \mathrm{e}^{-6} = (-4\,\mathrm{e}^{-6})\,(x+y-3)$.

3. Med t ex $r^2 = x^2 + y^2$ och $\tan\theta = y/x$, varav $\theta = \arctan(y/x)$ beräknar man $h_x = \dfrac{-r_x}{r^2}\,f(\theta) + \dfrac{1}{r}\,f'(\theta)\,\theta_x = \dfrac{-x}{r^3}\,f(\theta) + \dfrac{1}{r}\,f'(\theta)\left(\dfrac{-y}{r^2}\right)$ och motsvarande för h_y .