

SF 1626 Flervariabelanalys för M1
 Kontrollskrivning 2A
 måndagen den 9 februari 2009 klo 10.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Bestäm lokala extremvärden till funktionen $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy$.

2. Ytan S har parameterframställningen

$$\begin{aligned}x &= u + v, \\y &= u^2 + v^2, \\z &= u^3 + v^3.\end{aligned}$$

Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan S i den punkt som ges av $u = 1$ och $v = 2$.

3. Visa att ekvationen $x + y + \sin xy = 0$ uti en omgivning av origo definierar precis en strängt avtagande funktion, som vi kan kalla $y = g(x)$.

Beräkna härvid (detta är även en ledtråd) derivatan $g'(x) = \frac{dy}{dx}$ i origo.

Försök också beräkna andraderivatan $g''(0)$.

SVAR: 1. De stationära punkterna bestäms av $(0, 0) = \nabla f = (3x^2 - 6y, 2y - 6x)$, vilket ger de två punkterna origo och $(6, 18)$.

... ..

Origo är en sadelpunkt. Svar: Minimum = -108 uti $(6, 18)$.

2.

En tangent är $\mathbf{T}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 2u, 3u^2) = (1, 2, 3)$;

en andra tangent ges av $\mathbf{T}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, 2v, 3v^2) = (1, 4, 12)$.

En normal ges då av $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 = (12, -9, 2)$.

En ekvation för tangentplanet: $12(x - 3) - 9(y - 5) + 2(z - 9) = 0$.

3. ...

$$g'(0) = -1;$$

$$g''(0) = 2.$$

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. En yta definieras av ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning av punkten $(1, 3, 2)$, där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x, y)$. Bestäm (detta är även en ledtråd)

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{och} \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{i punkten } (1, 3).$$

2. Bestäm lokala extremvärden till funktionen

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + yz.$$

3. De två ytorna

$$xy + yz + xz = 2 \quad \text{och} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9$$

skär varandra längs en kurva Γ genom punkten $P : (0, 1, 2)$. Bestäm en ekvation för tangenten till Γ genom P .

Kan y och z skrivas som funktioner av x längs denna tangent? Hur kan man i så fall besvara samma fråga om vi istället rör oss längs Γ nära P ?

SVAR: **1.** Med $F(x, y, z) = 3xyz - z^3$ blir $z_x = -F_x/F_z = -\frac{3yz}{3(xy - z^2)} = 6$ och

$z_y = -F_y/F_z = -\frac{3xz}{3(xy - z^2)} = 2$ uti punkten $(1, 3, 2)$. Det väsentliga här är att

nämnummern $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$ icke är noll i den givna punkten. Då ger implicita funktions-satsen existensen av en lokalt definierad funktion $z = z(x, y)$ som beskriver vår yta.

2. De stationära punkterna bestäms av att $(0, 0, 0) = \nabla f$, vilket blir ett linjärt homogent ekvationssystem med tre obekanta i tre variabler. Dess systemdeterminant är nollskild, varför systemet är entydigt lösbart, och den lösningen är uppenbarligen origo. Den kvadratiska form som behöver undersökas är f själv, som är positivt definit, varför f har ett lokalt (och globalt) minimum $= 0$ uti origo.

3. Den första funktionen f ger en normal $\mathbf{n}_1 = \nabla f = \dots = (3, 2, 1)$; den andra funktionen g ger normalen $\mathbf{n}_2 = \nabla g = \dots = 3(0, 1, 4)$. En riktningsvektor till tangenten ges nu av $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 3(7, -12, 3)$. En ekvation för tangenten T är $\mathbf{r} - (0, 1, 2) = t\mathbf{v}$, med en reell parameter t . Längs T kan man skriva y och z som funktioner av x eftersom \mathbf{v} har en nollskild x -koordinat. Därför kan man även lokalt nära $(0, 1, 2)$ skriva y och z som funktioner av x längs kurvan Γ .