KTH Matematik

SF 1626 Flervariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 2A
måndagen den 9 februari 2009 klo 10.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Bestäm lokala extremvärden till funktionen $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy$.

2. Ytan S har parameterframställningen

$x = u + v$,
$y = u^2 + v^2$,
$z = u^3 + v^3$.

Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan S i den punkt som ges av $u = 1$ och $v = 2$.

3. Visa att ekvationen $x + y + \sin xy = 0$ uti en omgivning av origo definierar precis en strängt avtagande funktion, som vi kan kalla $y = g(x)$.

Beräkna härvid (detta är även en ledtråd) derivatan $g'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ i origo.

Försök också beräkna andraderivatan $g''(0)$.

SVAR: **1.** De stationära punkterna bestäms av $(0,0) = \nabla f = (3\,x^2 - 6\,y, 2\,y - 6\,x)$, vilket ger de två punkterna origo och $(6, 18)$.
... ...
Origo är en sadelpunkt. Svar: Minimum $= -108$ uti $(6, 18)$.

2.
En tangent är $\mathbf{T}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 2\,u, 3\,u^2) = (1, 2, 3)$;
en andra tangent ges av $\mathbf{T}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, 2\,v, 3\,v^2) = (1, 4, 12)$.
En normal ges då av $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 X \mathbf{T}_2 = (12, -9, 2)$.
En ekvation för tangentplanet: $12(x-3) - 9(y-5) + 2(z-9) = 0$.

3. ...
$g'(0) = -1$;
$g''(0) = 2$.

KTH Matematik

SF 1626 Flervariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 2B
måndagen den 9 februari 2009 klo 10.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. En yta definieras av ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning av punkten $(1,3,2)$, där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Bestäm (detta är även en ledtråd)

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{och} \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{i punkten} \quad (1,3) \; .$$

2. Bestäm lokala extremvärden till funktionen

$$f(x,y,z) = 2\,x^2 + y^2 + z^2 + 2\,xy + 2\,xz + yz \; .$$

3. De två ytorna

$$xy + yz + xz = 2 \quad \text{och}$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 9$$

skär varandra längs en kurva Γ genom punkten $P : (0,1,2)$. Bestäm en ekvation för tangenten till Γ genom P .

Kan y och z skrivas som funktioner av x längs denna tangent? Hur kan man i så fall besvara samma fråga om vi istället rör oss längs Γ nära P ?

SVAR: **1.** Med $F(x,y,z) = 3xyz - z^3$ blir $z_x = -F_x/F_z = -\dfrac{3\,y\,z}{3\,(xy - z^2)} = 6$ och $z_y = -F_y/F_z = -\dfrac{3\,x\,z}{3\,(xy - z^2)} = 2$ uti punkten $(1,3,2)$. Det väsentliga här är att nämnaren $F_z = \dfrac{\partial F}{\partial z}$ icke är noll i den givna punkten. Då ger implicita funktionssatsen existensen av en lokalt definierad funktion $z = z(x,y)$ som beskriver vår yta.

2. De stationära punkterna bestäms av att $(0,0,0) = \nabla f$, vilket blir ett linjärt homogent ekvationssystem med tre obekanta i tre variabler. Dess systemdeterminant är nollskild, varför systemet är entydigt lösbart, och den lösningen är uppenbarligen origo. Den kvadratiska form som behöver undersökas är f själv, som är positivt definit, varför f har ett lokalt (och globalt) minimum $= 0$ uti origo.

3. Den första funktionen f ger en normal $\mathbf{n}_1 = \nabla f = \cdots = (3,2,1)$; den andra funktionen g ger normalen $\mathbf{n}_2 = \nabla g = \cdots = 3\,(0,1,4)$. En riktningsvektor till tangenten ges nu av $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 X \mathbf{n}_2 = 3\,(7,-12,3)$. En ekvation för tangenten T är $\mathbf{r} - (0,1,2) = t\,\mathbf{v}$, med en reell parameter t . Längs T *kan man* skriva y och z som funktioner av x eftersom $\mathbf{v}$ har en nollskild x–koordinat. Därför kan man även lokalt nära $(0,1,2)$ skriva y och z som funktioner av x längs kurvan Γ .