Lösningsförslag till KS2, 2009-02-20

1. Enligt maximumprincipen måste maximum antas på randen.

1) För $x=0$ och $0 \le y \le 1$ fås

$$|\sin(z)| = |\sin(iy)| = \sinh(y)$$

som är maximal då $y=1$. Max är $\sinh(1)$

2) För $x=\pi$ och $0 \le y \le 1$ fås

$$|\sin(\pi+iy)| = |-\sin(iy)| = \sinh(y)$$

Maximum fås då $y=1$ och är $\sinh(1) = \frac{e-e^{-1}}{2}$

3) För $y=0$ fås $|\sin(z)| = |\sin x|$, $0 \le x \le \pi$

Maximum är $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

4) För $y=1$ fås $|\sin(x+i)|$

Efter kvadrering fås

$$|\sin(x+i)|^2 = \frac{e^{ix-1}-e^{-ix+1}}{2i} \cdot \frac{e^{-ix-1}-e^{ix+1}}{-2i}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{2} - \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2}+e^{-2}) - \frac{\cos 2x}{2}$$

Maximum fås då $x = \frac{\pi}{2}$

$$|\sin(\tfrac{\pi}{2}+i)|^2 = \frac{1}{4}(e^2+e^{-2}) + \frac{1}{2} = \left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)^2$$

som ger globalt maximum. $\frac{e+e^{-1}}{2}$,

Svar. Maximum är $\cosh(1) = \frac{e+e^{-1}}{2}$

och det antas i $(\frac{\pi}{2}, 1)$

2. Skriv

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(z-1)+2} - \frac{1}{(z-1)+4}\right] =$$

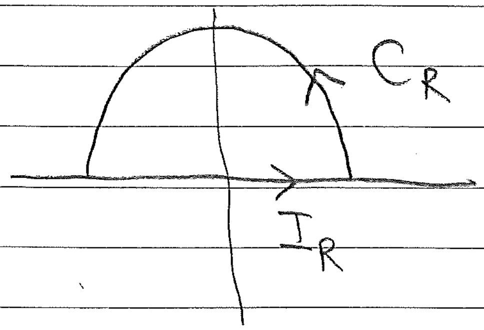
$$= \left[2 < |z-1| < 4\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{(z-1)^k} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{4^k}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n \quad \text{där}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}(-1)^{n+1}, & n \geq 0 \\ 2^{-n-2}(-1)^{n+1}, & n \leq -1 \end{cases}$$

3. Vi integrerar över $\Gamma_R = I_R + C_R$



$C_R: \; z = Re^{i\theta}, \; 0 \le \theta \le \pi$

Residusatsen ger

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^{1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z^4+1} \qquad (*)$$

där z_0 och z_1 är nollställena till $z^4+1=0$

i övre halvplanet

Vi får

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \right| \le \int_{C_R} \frac{|dz|}{|z|^4-1} \le \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0$$

då $R \to \infty$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4 z_0^3} = -\frac{1}{4} z_0$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4 z_1^3} = -\frac{1}{4} z_1$$

$z^4 + 1 = 0$ ger

$$z_k = e^{i\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Då $R \to \infty$ i $(*)$ fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(i \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$