

## TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2008-12-19, kl. 08.00–13.00

Hjälpmedel: BETA, *Mathematics Handbook*.

Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Preliminära betygsgränser: A: 32-, B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.

1) Låt  $f(t) = t^2$  då  $|t| \leq \pi$  och en  $2\pi$ -periodisk funktions på hela reella linjen. Det gäller (5p) att  $f(t)$  har Fourierserien

$$F(t) := \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt).$$

- (a) Motivera varför  $F(t) = f(t)$ ? (2p)  
 (b) Bestäm Fourierserien  $G$  för  $f'$  (motivera). (1p)  
 (c) Vad är  $G(\pi)$  (motivera)? (2p).

2) Undersök om funktionssekvensen (5p)

$$K_n(x) = \begin{cases} 3(n - n^3x^2) & |x| < 1/n \\ 0 & |x| \geq 1/n \end{cases}$$

är en positiv kärna (motivera ordentligt). Vad är värdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K'_n(x) f(x) dx,$$

där  $K'_n(x) = dK_n/dx$  är derivatan, och  $f$  är en deriverbar funktion.

3) Låt  $g(t) = (1 - t^2)^{3/2}$ . Bestäm konstanterna  $a, b, c$  så att (5p)

$$\int_{-1}^1 \frac{|15\pi g(t) - 4(11 + at + bt^2 + ct^3)|^2}{\sqrt{1 - t^2}} dt,$$

blir minimal.

4) Bestäm en lösning i form av tempererade distribution till differentialekvationen (5p)

$$f'' + f = \delta'.$$

5) Bestäm Foriertransformen för funktionen (5p)

$$f(t) = \frac{t}{t^2 - 2t + 5}.$$

(Det behövs inte några beräkningar, om man använder Beta samt egenskaper hos Fouriertransformen.)

6) Bestäm en lösning till integralekvationen (5p)

$$xe^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} 4(x - y)e^{-4(x-y)^2} f(y) dy \quad -\infty < x < \infty.$$

7) Lös modifierade vågekvationen

(6p)

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} - 2u_t = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x + \sin 3x & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lycka till

# Lösningförslag SF1629, 2008-12-19, 08.00–13.00

1) Definitionsområdet bör nog utökas till  $[-\pi, \pi]$  för enkelhetsskul.

(a) Enligt sats i boken, gäller det att  $F$ -serien konvergerar mot  $f(t)$ , om  $f$  är kontinuerlig samt  $F$ -serien är absolutkonvergent. Båda villkoren är uppfyllda.

(b) Fourierkoefficienterna för  $f$  och  $f'$  har sambandet  $c_n(f) = inc_n(f')$  om  $f$  är deriverbar på  $\mathbf{T}$  (förutom i  $t = \pm\pi$ ) och därför gäller detta samband. Alltså

$$F'(t) := 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) = f'(t).$$

(c) Eftersom  $f'$  inte är deriverbar i  $\pm\pi$  men den har höger och vänsterderivator så gäller enligt sats att

$$F'(\pi) = \frac{f'(\pi^+) + f'(\pi^-)}{2} = 0.$$

2) De tre villkoren för positiva kärnor är  $K_n \geq 0$ ,  $\int_{-a}^a K_n = 1$ , samt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |s| < a} K_n = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Beräkning ger att två av dessa är uppfyllda men  $\int_{-a}^a K_n = 4$ . Därför enligt definition är den inte en kärna. Partiellintegration och det faktum att  $K(\pm 1/n) = 0$  ger att integralen blir lika med

$$\int_{-\infty}^{\infty} K'_n(x) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) f'(x) dx = -4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(x)}{4} f'(x) dx \rightarrow -4f'(0),$$

då  $K_n/4$  är en positiv kärna.

3) Jämför Ex. 5.14 i textboken. Inreprodukten är relaterade till Chebyshevs polynom. Därmed motsvarande räkningar som i sidan 129 kan göras och man får

$$a = c = 0, \quad b = -12.$$

4) Vi kan ta Fouriertrnsform för båda leden och får

$$-\omega \hat{f} + \hat{f} = i\omega$$

som ger

$$2\hat{f} = \frac{2i\omega}{1 - \omega^2} = -\frac{i}{\omega - 1} - \frac{i}{\omega + 1}.$$

sätt nu  $\hat{g}(\omega) = 2/i\omega$  då är

$$\begin{aligned} 4\hat{f} &= -\frac{2i}{\omega - 1} - \frac{2i}{\omega + 1} = -\mathcal{F}(e^{it} \operatorname{sgn}(t)) - \mathcal{F}(e^{-it} \operatorname{sgn}(t)) = \\ &= -\mathcal{F}(2 \cos t \operatorname{sgn}(t)). \end{aligned}$$

Dvs  $f(t) = (\cos t \operatorname{sgn}(t))/2$ .

5) Kvadrera nämnaren, och vi får

$$f(t) = \frac{t}{(t-1)^2 + 2^2} = \frac{(t-1)}{(t-1)^2 + 2^2} + \frac{1}{(t-1)^2 + 2^2}.$$

Sätt  $g(t) = t/(t^2 + 2^2)$   $h(t) = 1/(t^2 + 2^2)$  för att få  $f(t) = g(t-1) + h(t-1)$ . Vi har

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}_1 + \hat{h}_1(t) = e^{-\omega i} \hat{g}(\omega) + e^{-\omega i} \hat{h}(\omega) = -i\pi e^{-\omega i} e^{-2|\omega|} \operatorname{sgn}(\omega)/2 + \pi e^{-\omega i} e^{-2|\omega|}/2.$$

6) Vi kan integrera båda leden m.a.p.  $x$  för att få

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(x-y)^2} f(y) dy \quad -\infty < x < \infty.$$

Nu tar vi  $F$ -transform för båda leden (m.a.p.  $x$  självklart!).

$$\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_x(e^{-4(x-y)^2}) f(y) dy.$$

Vi får

$$\mathcal{F}_x(e^{-4(x-y)^2}) = e^{-iy\omega} \mathcal{F}_x(e^{-4(x)^2}) = e^{-iy\omega} \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{-\omega^2/16}$$

som efter insättning ger

$$e^{-\omega^2/4} = \frac{1}{2} e^{-\omega^2/16} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\omega} f(y) dy$$

som förenklas till

$$2e^{-3\omega^2/16} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\omega} f(y) dy = \hat{f}(\omega).$$

Enligt Beta är då

$$f(t) = \frac{1}{3\pi} e^{-4t^2/3}.$$

7) Varibelseparation leder till

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

samt

$$T'' + 2T' - \lambda T = 0.$$

Initial data  $T(0) = \sin x + \sin 3x$  samt  $T'(\pi) = 0$  får vänta!

Vi löser dessa ekvationer för olika val av  $\lambda$ :

$\lambda \geq 0$  inser man genast att det inte finns ngra lösningar som även satisfierar randavillkoren. För  $\lambda = -n^2 < 0$  har vi  $X = A \cos nx + B \sin nx$  som efter insättning av initialdata ger  $A = 0$  och  $B$  fritt. För  $T$  får vi

$$T'' + 2T' + n^2 T = 0,$$

som ger lösningen

$$T(t) = e^{-t}(A_n \cos(\sqrt{n^2 - 1}t) + B_n \sin(\sqrt{n^2 - 1}t)) \quad n > 1$$

och (pga dubbelrot  $r_0 = -1$  för den karakteristiska ekvationen får vi

$$T(t) = (a + bt)e^{-t}, \quad \text{då } n = 1.$$

En lösning blir då

$$u(x, t) = (a + bt)e^{-t} \sin x \sum_{n=2}^{\infty} \sin nx e^{-t} (A_n \cos(t\sqrt{n^2 - 1}) + B_n \sin(t\sqrt{n^2 - 1})).$$

Nu kan vi använda initialdata  $u(x, 0) = \sin x + \sin 3x$ , samt  $u_t(x, 0) = 0$  givna i problemet.

$$0 = u(x, 0) = a + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin nx = \sin x + \sin 3x$$

ger  $A_n = 0$  då  $n \neq 3$  och  $A_3 = 1$  samt  $a = 1$ . Sätter vi in detta och använder andra villkoret för vi

$$0 = u_t(x, 0) = b \sin x - \sin x - A_3 \sin 3x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin nx \sqrt{n^2 - 1},$$

som ger  $b = 1$ ,  $B_3 = 1/\sqrt{8}$ , och  $B_n = 0$  för övriga  $n$ . Lösningen blir alltså

$$u(x, t) = (1 + t)e^{-t} \sin x + \sin 3x e^{-t} \cos t\sqrt{8} + e^{-t} \sin 3x \frac{\sin t\sqrt{8}}{\sqrt{8}}.$$