Institutionen för Matematik, **KTH**

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629, 2008-10-23, kl. 8.00–13.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Tentamen består av 6 uppgifter som ger totalt högst 19 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Preliminära betygsgränser: för betyg Fx krävs 8 poäng, för betyg E krävs 9 poäng, för betyg D krävs 11 poäng, för betyg C krävs 13 poäng, för betyg B krävs 15 poäng och för betyg A krävs 17 poäng.

1) Lös följande differentialekvation (3p)

$$(x^2 - 2x + 2)y' = (x-1)(1-y^2), \qquad y(0) = 3$$

samt ange största intervall där lösningen existerar.

2) Given differentialekvationen (3p)

$$2(t-1)^2 y'' + 3(t-1)y' - y = 0, \qquad t > 1,$$

visa att $y_1 = (t-1)^{-1}$ är en lösning. Bestäm en andra linjärt oberoende lösning y_2 (Du ska även visa att lösningarna är linjärt oberoende).

3) Betrakta differentialekvationen (3p)

$$2y'' + \frac{\ln(x+1)}{\sin x^s} y' + \frac{\ln(x+1)}{\sin x^t} y = 0,$$

där s, t är reella tal.
a) För vilka värden på dessa konstanter är punkten $x = 0$ en irreguljär singulär punkt?
b) För $s = t = 2$ bestäm de två första termerna i utvecklingen av serielösningen kring $x = 0$, för den största roten till indicialekvationen.

4) Med hjälp av Laplacetransformen bestäm lösningen till (3p)

$$y''' + y'' - 9y' + 7y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3.$$

5) Lös systemet av differentialekvationer (3p)

$$x' = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \qquad y' = 2x - 2y.$$

6) Visa att följande system (4p)

$$x' = 3x - y - xe^{x^2+y^2}, \qquad y' = x + 3y - ye^{x^2+y^2}$$

har en periodisk lösning. (Ledning: Använd polära koordinater.)

Lycka till

Lösningsförslag SF1629, Oktberber 23, 2008, 08.00–13.00

1) Skriv om ekvationen

$$\frac{dy}{1-y^2} = \frac{2(x-1)dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}(\ln(x^2-2x+2))'dx.$$

Vänsterledet kan partialbråksuppdelas och vi får

$$\frac{dy/2}{1-y} + \frac{dy/2}{1+y} = \frac{1}{2}(\ln(x^2-2x+2))'dx,$$

integration ger

$$\frac{1}{2}(\ln|1+y| - \ln|1-y|) = \frac{1}{2}(\ln(x^2-2x+2)) + konstant.$$

Lösningen ges nu av

$$\ln\frac{|1+y|}{|1-y|} = \ln(x^2-2x+2) + konstant$$

och efter insättning av $y(0) = 3$ får vi $konstant = 0$. Nu kan vi lösa y i termer av x och får

$$y(x) = 1 + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

existensintervallet blir $x < 1$, eftersom $x = 0$ ligger i detta intervall.

2) Insättning ger att funktionen löser ekvationen. Den andra lösningen kan fås genom ansatsen $y = v(t-1)^{-1}$, som efter deriveringar och insättning reduceas till

$$2(t-1)v'' - v' = 0.$$

Funktionen v' kan enkelt lösas ur detta (separation av variabler) och vi får $v' = c_1(t-1)^{1/2}$, dvs $v = (2/3)c_1(t-1)^{3/2} + c_2$. Alltså blir den andra lösningen $y_2 = (2/3)c_1(t-1)^{1/2} + c_2(t-1)^{-1}$. Vi kan välja $c_2 = 0$, eftersom y_1 är en lösning och $c_1 = 3/2$ för att få $y_2 = (t-1)^{1/2}$. Nu beräknas Wronskianen som blir $(3/2)(t-1)^{-3/2} \neq 0$, dvs linjärt oberoende.

3) Jämför sidorna 286-289 i boken. Vi har $P(x) = 2$, $Q(x) = \ln(x+1)/\sin x^s$, $R(x) = \ln(x+1)/\sin x^t$ (se ekvation (11)-(14) sidan 288. Därmed kan vi beräkna $p_0 = \lim_{x\to 0} Q(x) = x\ln(x+1)/2\sin x^s$, samt $q_0 = \lim_{x\to 0} Q(x) = x^2\ln(x+1)/2\sin x^t$. Vi ser att om $s > 2$ så kommer gränsvärdet p_0 inte exitera, och får $s \leq 2$ så exiterar gränsvärdet. För $t > 3$ har vi också att q_0 inte existerar. Därför är $x = 0$ en irregular singulär punkt för $s > 2$ eller $t > 3$.

För $s = t = 2$ har vi att $p_0 = 1/2$, $q_0 = 0$ (använd Taylorutveckling för $\ln(x+1)$ och $\sin x^2$ och beräkna gränsvärdet).

Vidare har vi att indicialekvationen är $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ och med dessa värden $p_0 = 1/2, q_0 = 0$ får vi $r_1 = 0, r_2 = 1/2$. Skriv om ekvationen till

$$2\sin x^2 y'' + \ln(x+1)y' + \ln(x+1)y = 0.$$

Vi gör ansatsen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2},$$

och får

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) a_n x^{n-1/2} = (a_0/2)x^{-1/2} + (3/2)a_1 x^{1/2} + O(x^{3/2}),$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)(n-1/2) a_n x^{n-3/2} = -(a_0/4)x^{-3/2} + (3/4)a_1 x^{-1/2} + O(x^{1/2}),$$

samt

$$\sin x^2 = x^2 + O(x^4), \qquad \ln(x+1) = x + O(x^2).$$

Insättning i ekvationen ger

$$2[x^2 + O(x^4)][-a_0/4x^{-3/2} + (3/4)a_1 x^{-1/2} + O(x^{1/2})] +$$

$$[x + O(x^2)][(a_0/2)x^{-1/2} + (3/2)a_1 x^{1/2} + O(x^{3/2})] + [x + O(x^2)][a_0 x^{1/2} + O(x^{3/2})] = 0$$

$$(3a_1 + a_0)x^{3/2} + O(x^{5/2}) = 0,$$

dvs $a_1 = -a_0/3$ och a_0 kan väljas fritt. Valet blir då

$$a_0(1 - (1/3)x^{3/2} + \text{högre termer}).$$

4) Laplacetransformen av ekvationen leder till

$$(s^3 + s^2 - 9s + 7)Y = \frac{s^2 + 2s - 7}{s - 2}$$

eller

$$(s^3 + s^2 - 9s + 7)Y = \frac{s^2 + 2s - 7}{s - 2}$$

$$(s^2 + 2s - 7)(s - 1)Y = \frac{s^2 + 2s - 7}{s - 2}$$

dvs

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-1)}.$$

Tar vi inversen får vi

$$y = e^{2x} - e^x.$$

5) Ekvationen i matrsiform är $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \qquad \mathbf{b} = (4e^{-2}, 0).$$

Matrisen A har två egenvärden $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Egenvektor till $\lambda = 2i$ är $\xi = (1+i, 1)$, som ger lösningen $\mathbf{x} = \xi e^{2it}$ vars real och imaginär del bli

$$\mathbf{x}^1 = (\cos 2t - \sin 2t, \cos 2t), \qquad \mathbf{x}^2 = (\cos 2t + \sin 2t, \sin 2t).$$

En partikulär lösning kan hittas med hjälp av ansatsen $\mathbf{x_p} = (a, b)e^{-2t}$ och efter insättning vi får $a = 0, b = 1$. Alltså den allmänna lösningen blir

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

6) Vi ser att $(0, 0)$ är en kritisk punkt till systemet. Vi visar att den är det enda kritiska punkten. Inför polära koordinater som ger

$$3r\cos\theta - r\sin\theta = r\cos\theta e^{r^2}, \quad r\cos\theta + 3r\sin\theta = r\sin\theta e^{r^2}.$$

Om $\theta \neq n\pi/2$, med n heltal, kan vi förkorta med $r \neq 0$ och dividera ekvationerna med $\cos\theta$ respektive $\sin\theta$ och få

$$3 - \tan\theta = \cot\theta + 3 = e^{\theta}$$

som kan inses lätt från de första 2 ekvationerna att $\tan^2\theta = -1$ som inte har någon lösning.

För $r \neq 0$ så kan inte heller $\theta = n\pi/2$ (prova i ekvationen).

Vi kan nu skriva om ekvationen i polära form

$$rr' = \frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 3r^2 - r^2e^{r^2} = r^2(3 - e^{r^2}).$$

Man ser att för r litet så är $r' > 0$ (dvs lösningskurvorna går utåt) och för r stort så är $r' < 0$, dvs (dvs lösningskurvorna går inåt). Men detta innebär att det måste finnas en periodsik lösning som går runt origo (Poincaré-Benedixson sats).

Ekvationen kan även lösas explicit med hjälp av polära koordinater. Vi får efter lite räkning att

$$\theta' = 1, \qquad r' = 3r - re^{r^2}$$

som har lösningen $\theta = t + \theta_0$ samt $r = \sqrt{\ln 3}$. Detta ger

$$x(t) = \sqrt{\ln 3}\cos(t + \theta_0), \qquad y(t) = \sqrt{\ln 3}\sin(t + \theta_0)$$