Institutionen för Matematik, **KTH**

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2009-06-09, kl. 08.00–13.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas.
Preliminära betygsgränser: A: 32- , B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.

1) *Beräkna exakta värdet av* (5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1},$$

genom att använda Fourier-cosinusserien för funktionen $\sin x$ *över ett lämpligt intervall.*

2) *Beräkna gränsvärdet* (5p)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/n}^{1/n} nf(x)(1-|nx|)^2 dx,$$

dr f *r en kontinuerlig funktion.*

3) *Låt* $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. *Visa att* $f * f$ *är i* $L^2(\mathbf{R})$. (5p)

4) *Given differentialekvationen*

$$t^2u'' + 3tu' + \lambda u = 0, \qquad 1 < t < e, \qquad u(1) = 0 \qquad u(e) = 0.$$

(a) *Skriv om ekvationen så att en symmetrisk operator* A *kan assoiceras till ekvationen i ett lämpligt* $L^2_w(1, e)$ *rum (i enlighet med Sturm-Liouvilles sats).* (2p)
(b) *Bestäm egenvärden och egenfunktioner till ekvationen. (Ekvationen är av Eulertyp.)* (3p)

5) *Låt* u *vara en lösning till värmeledningsekvationen* (5p)

$$u_{xx} - u_t = 0, \qquad u(x, 0) = f(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

där $f \in L^1(\mathbf{R})$. *Låt vidare*

$$E(x,t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Visa att $u = E(x, t) * f(x)$

6) *Bestäm en funktion* g *sådan att* (5p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left(\frac{e^{|x|-|x-y|}}{1+|x|}\right) dy = 1 \qquad -\infty < x < \infty.$$

7) *Visa att för alla positiva heltal* n *gäller det att* (6p)

$$g\delta^{(n)} \equiv 0$$

där $\delta^{(n)}$ *är* n*-te derivatan av Diracs deltafunktion i origo och* $g(x) = e^{-1/x^2}$ *då* $x \neq 0$ *och* $g(0) = 0$.

Lycka till

Lösningsförslag SF1629, 2008-12-19, 08.00–13.00

1) *För att få F-cos serien måste vi ha en jämn funktion. Därför definerar vi* $f(x) = |\sin x|$. *Enligt Beta, s. 310 gäller det att*

$$|\sin x| = F(x) := \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).$$

Eftersom $f(x)$ *är kontinuerlig gäller det att* $f(0) = 0 = F(0)$, *dvs F-serien har samma värde som funktionen i puntken* 0. *Därmed*

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

som ger

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

2) *Låt* $U_n(x) = n(1-|nx|)^2$ *på inervallet* $(-1/n, 1/n)$ *och* $U_n = 0$ *för övrigt.*
De tre villkoren för positiva kärnor är $U_n \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} U_n = 1$, *samt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|s|<a} U_n = 0, \qquad \forall\delta > 0.$$

Beräkning ger att två av dessa är uppfyllda men $\int_{-\infty}^{\infty} U_n = 2/3$. *Därför r funktionen* $K_n = 3U_n/2$ *en positiv kärna. Således gäller det att*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1/n}^{1/n} U_n(x)f(x)dx = (2/3)\lim_{n\to\infty}\int_{-1/n}^{1/n} K_n(x)f(x)dx = 2f(0)/3.$$

3) *Sätt* $F = f * f$. *Då gäller det att* $F \in L^1(\mathbf{R})$ *(enligt boken sidan 177, men utan bevis). Observera att man behver detta* L^1 *egenskap fr att kunna ge definition t faltningen (konvoution). Fourier-transformen ger* $\hat{F}(\omega) = \hat{f}^2(\omega) = \pi^2 e^{-|\omega|}$ *som tillhör* $L^2(\mathbf{R})$. *Enligt Plancherels formel*

$$\int |\hat{F}(\omega)|^2 = \int |F(t)|^2,$$

dvs även F *tillhör* L^2.

4a) *Skriv om ekvationen som självadjungerande form (se sidorna 153-158 i textboken):*

$$(t^3y')' + \lambda t y = 0, \qquad \textit{över } [1, e].$$

Viktfunktionen blir $w(t) = t$ *(se exempelvis ekvation (E) sidan 155). Definera en operator* A *genom*

$$Au = -\frac{1}{t}(t^3u')' \qquad \forall \quad u \in D(A),$$

där $D(A) = \{u \in C^2[1,e] : \ u(0) = 0,\ u(e) = 0\}$. *Vi kan visa att operatorn* A *är symmetrisk genom att göra successiv partiellintegration och använda randdata*

$$< Au, v >= -\int_1^e \frac{1}{t}(t^3u')'\bar{v}w = \{w \text{ är vikten } = t\}$$

$$= \{ \textit{ integration och användandet av randvärden ger } \} = -\int_1^e \frac{(^3}{t} u')\bar{v}' = \cdots = < u, Av >$$

4b) *Ekvationen är av Euler typ och därför kan vi använda variabelsubstituionen* $t = e^x$ *och få*

$$u''(x) + 2u'(x) + \lambda u(x) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Detta ger en karaktäristisk ekvation $r^2 + 2r + \lambda = 0$ *som har lösningen* $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$. *Flera möjligheter för* λ *uppstår:* $\lambda \leq 1$ *ger inga lösningar med avseende på randdata. För* $\lambda > 1$ *får vi* $\lambda = 1 - n^2\pi^2$ *med* $n = 1, 2, \ldots$ *och egenfunktionerna*

$$u_n(x) = e^{-x} \sin(n\pi x),$$

som efter insättning av variabeln $t = e^x$ *ger*

$$u_n(t) = \frac{1}{t} \sin(n\pi \ln t)$$

för $n \geq 1$.

5) *Se textboken (Vretblad, sidan 182-183), eller ta Fouriertransformationen för höger-vänsterleden i både värmeledningsekvationen samt uttrycket för* u, $u = E * f$, *sen lös den enkla ekvationen.*

6) *Vi kan skriva om ekvationen*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-|x-y|} dy = (1 + |x|) e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty,$$

dvs

$$g(x) * e^{-|x|} = (1 + |x|) e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty,$$

Vi tar F-transform för båda leden (m.a.p. x).

$$\hat{g} \mathcal{F}(e^{-|x|}) = \mathcal{F}\left((1 + |x|) e^{-|x|}\right)$$

Vi får

$$\hat{f} \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}$$

som förenklas till

$$\hat{f} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Enligt Beta är då

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

7) *Låt* φ *vara en* C^∞ *funktion tillhörande Schwartzklassen. Då gäller det att*

$$\left(g\delta^{(n)}\right)[\varphi] = (-1)^n \delta[D^n(g\varphi)].$$

Man får enligt Leibniz formell

$$D^n(g\varphi) = \sum_j^n \frac{n!}{j!(n-j)!} D^j g \varphi^{(n-j)}$$

och därför

$$\left(g\delta^{(n)}\right)[\varphi] = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} D^j g(0) \varphi^{(n-j)(0)}.$$

Varje derivata $h(x) := D^j e^{-1/x^2}$ *innehåller termer av typ* $h_k := e^{-1/x^2}/x^k$ *där* $k \leq 2j$ *(eller enligt tal). Man får att* $\lim_{x\to 0} h_k(x) = 0$ *dvs* $h(0) = 0$. *Detta innebär att* $g^j(0) = 0$ *för alla ordningens derivator* j.

Alltså $g\delta^{(n)} \equiv 0$.