Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 5 juni 2009 kl 08.00-13.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt08 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm en lösning till den diofantiska ekvationen
$$373x + 83y = 1.$$

2. (3p) Avgör om nedanstående två tal är lika eller olika:
$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} \qquad \text{resp} \qquad \binom{n-1}{k-1}.$$

3. (3p) Kan talet a bestämmas så att det finns ett träd T med 27 noder med valens 1, a noder med valens 2, 11 noder med valens 3, och 11 noder med valens 4.

4. (3p) Bestäm samtliga lösningar i ringen Z_{12} till ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ \quad\;\; 3y = 0 \end{cases}$$

5. (3p) Är matchningen $\mathcal{M} = \{(x_1, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_3), (x_5, y_5)\}$ i den bipartita grafen G med nodmängden
$$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_5, y_1, y_2, \ldots, y_5\},$$
och kantmängden E nedan
$$\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_5), (x_4, y_2), (x_4, y_3), (x_5, y_4), (x_5, y_5)\},$$
en maximal matchning.

DEL II

6. (3p) Bestäm antalet tal n mellan 1 och 100, dvs $1 \leq n \leq 100$, som är relativt prima till talet 50.

7. (4p) Tio personer skall dela på tre taxibilar till en fest. På hur många olika sätt kan de tio fördela sig på de tre bilarna om ingen bil får ha mer än fyra passagerare.

8. (4p) Bestäm t ex med hjälp av kinesiska restsatsen och så kallad snabb aritmetik samtliga lösningar i ringen Z_{630} till ekvationen
$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) (1p) Betrakta $\mathcal{S}_6$ och permutationen $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Bestäm φ^2 samt bestäm en permutation $x \in \mathcal{S}_7$ sådan att
   $$x^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7),$$
   eller visa att en sådan permutation x ej finns.

   (b) (2p) Härled en formel för antalet lösningar i $\mathcal{S}_n$ till ekvationen
   $$x^2 = (1)(2)\ldots(n).$$

   (c) (1p) Låt φ och ψ vara permutationer i $\mathcal{S}_n$ av samma typ. Kommer ekvationerna $x^2 = \varphi$ och $x^2 = \psi$ då alltid att ha lika många lösningar i $\mathcal{S}_n$.

   (d) (2p) Går det att formulera någon generell sats med vars hjälp man ”enkelt” kan avgöra om ekvationen $x^2 = \psi$ är lösbar i $\mathcal{S}_n$ för någon given permuttion ψ.

10. Låt N_n beteckna mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vi betraktar par (f, g) av funktioner sådana att f är en funktion från N_s till N_t och g är en funktion från N_t till N_u. Låt $I(s, t, u)$ beteckna antalet sådana par med egenskapen att sammansättningen $g \circ f$ är en injektiv funktion från N_s till N_u och låt $S(s, t, u)$ beteckna antalet sådana par med egenskapen att sammansättningen $g \circ f$ är en surjektiv funktion från N_s till N_u

    (a) (2p) Härled en formel för $I(s, t, u)$.

    (b) (2p) Härled en fomel för $S(s, t, u)$.

    Anm. Alla i kursen definierade storheter får användas i svaren till uppgift 10.