Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 9 mars 2009 kl 14.00-19.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt09 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

   med begynnelsevärdena $a_0 = 2$ och $a_1 = -1$.

2. (3p) Lös i ringen Z_{11} ekvationen $4x + 7 = 6$.

3. (3p) På hur många olika sätt kan en klass med nio elever delas in i tre grupper så att eleverna A, B och C hamnar i olika grupper, dvs ingen grupp innehåller både A och B, eller både A och C eller både B och C eller alla tre. Svara med ett heltal (och en väl motiverad lösning.)

4. (3p) Låt G vara en ändlig graf med minst tre kanter och som är sådan att alla noder har jämn valens. Förklara varför G måste ha minst en cykel

5. (3p) Ange lämpliga uttryck för a och b så att

$$\binom{a}{b} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{n-k-1}$$

DEL II

6. Besvara följande frågor och glöm ej att motivera ditt svar.
   (a) (1p) Finns det udda permutationer vars ordning är ett jämnt tal?
   (b) (1p) Finns det jämna permutationer vars ordning är ett udda tal?
   (c) (1p) Finns det udda permutationer vars ordning är ett udda tal?
   (d) (1p) Finns det jämna permutationer vars ordning är ett jämnt tal?

7. (3p) Två klasser med vardera 12 elever skall utse en kommité bestående av sex elever. På hur många olika sätt kan detta ske om minst två elever från varje klass skall ingå.

8. (4p) Bestäm och ange på ett lämpligt sätt samtliga hela tal x som satisfierar ekvationerna

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 5 \pmod{11}, \\ 2x+3 &\equiv 5 \pmod{9}, \\ x &\equiv 5 \pmod{7}. \end{aligned}$$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt G vara en k-regulär bipartit graf G med nodmängderna X och Y, och alltså i vilken samtliga kanter har sina ena ändpunkt i en nod i X och sin andra ändpunkten i en nod i Y.
   (a) (1p) Visa att antalet noder i X är lika med antalet noder i Y.
   (b) (1p) Motivera, t ex genom att hänvisa till en lämplig sats varför det, under förutsättningen att $k = 2$, alltid finns en (”äkta”) kantfärgläggning (”edge-colouring” i läroboken) i två färger till grafen G.
   (c) (3p) Visa, t ex genom att använda lämpliga satser i kursboken eller på något annat sätt, att om p är ett positivt heltal mindre än k så finns en färgläggning av kanterna i G, i färgerna svart och vitt, sådan att vid varje nod inträffar precis p vita kanter och $k - p$ svarta kanter.

10. Låt $\mathrm{sgd}(a, b)$ beteckna den största gemensamma delaren till talen a och b och låt $\mathrm{mgm}(a, b)$ beteckna den minsta gemensamma multipeln till a och b.
    (a) (1p) Visa att för alla tal a och b så gäller att $\mathrm{sgd}(a, b)$ delar $\mathrm{mgm}(a, b)$.
    (b) (1p) Hur många olika mängder $\{x, y\}$, där x och y är positiva hela tal, finns det sådana att

$$\mathrm{sgd}(x, y) = 60 \qquad \text{och} \qquad \mathrm{mgm}(x, y) = 840.$$

    (c) (3p) Formulera och bevisa en lämplig sats som generaliserar en korrekt lösning av föregående uppgift.