Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 5 juni 2009 kl 08.00-13.00.

DEL I

1. (3p) Bestäm en lösning till den diofantiska ekvationen

$$373x + 83y = 1.$$

Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 373 &= 4 \cdot 83 + 41 \\ 83 &= 2 \cdot 41 + 1. \end{aligned}$$

Ur denna erhåller vi

$$1 = 83 - 2 \cdot 41 = 83 - 2(373 - 4 \cdot 83) = 9 \cdot 83 - 2 \cdot 373.$$

SVAR: $x = -2$ och $y = 9$ till exempel.

2. (3p) Avgör om nedanstående två tal är lika eller olika:

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} \qquad \text{resp} \qquad \binom{n-1}{k-1}.$$

Lösning: Vi finner att

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!},$$

samt att

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!},$$

dvs de bägge talen är lika vilket blir vårt **SVAR**.

3. (3p) Kan talet a bestämmas så att det finns ett träd T med 27 noder med valens 1, a noder med valens 2, 11 noder med valens 3, och 11 noder med valens 4.

Lösning: Antalet kanter e i grafen T fås ur sambandet mellan nodernas valenser och antalet kanter enligt nedan

$$e = \frac{1}{2}(27 \cdot 1 + a \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 11 \cdot 4) = 52 + a.$$

Antalet noder v blir ju

$$v = 27 + a + 11 + 11 = 49 + a.$$

I varje träd gäller att $v = e + 1$. Denna ekvation är omöjlig att uppfylla för givna indata, så vi får

SVAR: Nej

4. (3p) Bestäm samtliga lösningar i ringen Z_{12} till ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 5y & = & 3 \\ & & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

Lösning: Ekvationen $3y = 0$ har lösningarna $y = 0, 4$ eller 8, vilket vi fann medelst prövning. Med dessa värden på y får vi följande möjligheter för den första ekvationen

$$2x = 3, \qquad 2x + 8 = 3, \qquad 2x + 4 = 3.$$

Men, en enkel kontroll visar att

$$\{2x + k \cdot 4 \mid x \in Z_{12}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\},$$

för $k = 0, 1, 2$, så den första ekvationen blir omöjlig att uppfylla för något värde på x om $y = 0, 4$, eller 8.

5. (3p) Är matchningen $\mathcal{M} = \{(x_1, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_3), (x_5, y_5)\}$ i den bipartita grafen G med nodmängden

$$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_5, y_1, y_2, \ldots, y_5\},$$

och kantmängden E nedan

$$\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_5), (x_4, y_2), (x_4, y_3), (x_5, y_4), (x_5, y_5)\},$$

en maximal matchning.

Lösning: Om vi ritar grafen och markerar matchningen ser vi lätt att följden av noder

$$x_2 y_2 x_3 y_5 x_5 y_4$$

bildar en alternerande stig till den givna matchnngen. Till en maximal matchning finns aldrig alternerande stigar. Alltså kan den givna matchningen inte vara maximal, vilket blir vårt **SVAR**.

DEL II

6. (3p) Bestäm antalet tal n mellan 1 och 100, dvs $1 \leq n \leq 100$, som är relativt prima till talet 50.

Lösning: Talet 50 kan faktoriseras i en produkt av primtal enligt

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

Talet n och talet 50 är relativt prima om de saknar gemensamma delare förutom talet 1, dvs precis då n saknar delare d sådana att $2 \mid d$ eller $5 \mid d$. Vi skall alltså söka antalet tal $1 \leq n \leq 100$ sådana att $2 \not| n$ och $5 \not| n$. Vi gör detta med hjälp av principen om inklusion exklusion.

Antalet tal $n \leq n \leq 100$ sådna att de inte delas av två, dvs vart annat tal, är lika med 50. Vart femte tal är inte delbart med 5 och vart tionde ej delbart med varken 2 eller 5. Totalt är antalet tal som ej är delbara med 2 eller 5 mellan 1 och hundra lika med

$$100 - (50 + 20) + 10 = 40.$$

SVAR: 40.

7. (4p) Tio personer skall dela på tre taxibilar till en fest. På hur många olika sätt kan de tio fördela sig på de tre bilarna om ingen bil får ha mer än fyra passagerare.

Lösning: Antingen kommer fyra personer att finnas i två av bilarna och två personer i en bil, eller så kommer en bil ha fyra personer och två bilar att ha tre personer vardera. Bilarna är olika, så de tio olika personerna skall fördelas i tre ”etiktterade” delmängder, med antal element enligt utredningen ovan. Svaret ges då av multinomialkoefficienter och vi får, eftersom det finns tre möjliga val av bil med två passagerare, resp i andra fallet tre val av bil med fyra passagerare,

SVAR:

$$3 \cdot \binom{10}{4,4,2} + 3 \cdot \binom{10}{4,3,3}.$$

Anm: Om bilarna anses oetiketterade skall multinomialkoefficienterna ovan multipliceras med $1/2$ istället för med tre, vilket också gav full poäng på uppgiften.

8. (4p) Bestäm t ex med hjälp av kinesiska restsatsen och så kallad snabb aritmetik samtliga lösningar i ringen Z_{630} till ekvationen

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Lösning: Ringen Z_{630} är isomorf med den direkta produkten av ringarna Z_7, Z_9 och Z_{10} eftersom $630 = 7 \cdot 9 \cdot 10$ samt pga att talen 7, 9 och 10 är parvis relativt prima. Elementen i ringarna korresponderar då till varandra enligt

$$x \in Z_{630} \qquad \longleftrightarrow \qquad (x_1, x_2, x_3) \in Z_{630},$$

where $x_1 = x(\text{mod } 7)$, $x_2 = x(\text{mod } 9)$ och $x_3 = x(\text{mod } 10)$. Om elementet x satisfierar den givna ekvationen så kommer

$$x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0, \qquad x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0, \qquad x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0,$$

att gälla och alla tripplar (x_1, x_2, x_3) som satisfierar dessa ekvationer kommer, enligt kinesiska restsatsen, att ge ett element $x \in Z_{630}$ som satisfierar givna ekvationen.

Genom prövning finner vi för $x_1 \in Z_7$ att

$$x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \in \{1, 2\},$$

för $x_2 \in Z_9$ att

$$x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_2 \in \{1, 2\},$$

och för $x_3 \in Z_{10}$ att

$$x_3^2 - 3x_3 + 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_3 \in \{1, 2, 6, 7\}.$$

Allmänna lösningsformeln för ett system av kongruenser ger att kongruensekvationerna

$$x \equiv_7 x_1, \qquad x \equiv_9 x_2, \qquad x \equiv_{10} x_3,$$

har lösningen

$$x = -x_1 \cdot 9 \cdot 10 + 4x_2 \cdot 7 \cdot 10 + 7x_3 \cdot 7 \cdot 9 \pmod{630}.$$

Det finns totalt $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ möjliga taltripplar att kombinera ihop.

SVAR: $x = -90x_1 + 280x_2 + 451x_3 \pmod{630}$, där $x_1 \in \{1, 2\}$, $x_2 \in \{1, 2\}$ och $x_3 \in \{1, 2, 6, 7\}$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) (1p) Betrakta $\mathcal{S}_6$ och permutationen $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Bestäm φ^2 samt bestäm en permutation $x \in \mathcal{S}_7$ sådan att
   $$x^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7),$$
   eller visa att en sådan permutation x ej finns.

   Lösning: Vi finner att
   $$\varphi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6).$$
   Kvadererar vi cykeln $x = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7)$ får vi cykeln
   $$x^2 = (a_1\ a_3\ a_5\ a_7\ a_2\ a_4\ a_6).$$
   Så vi identifierar a_1 med 1, a_3 med 2 etc och får
   $$x = (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4).$$

   (b) (2p) Härled en formel för antalet lösningar i $\mathcal{S}_n$ till ekvationen
   $$x^2 = (1)(2)\ldots(n).$$

   Lösning: Vi ansätter en lösning x som en produkt av disjunkta cykler $x = \psi_1\psi_2\ldots\psi_k$, och får
   $$x^2 = \psi_1^2\psi_2^2\ldots\psi_k^2.$$
   För att detta skall vara lika med identitespermutationen krävs att $\psi_t^2 = id$ för $t = 1, 2, \ldots, k$. Detta inträffar bara om dessa permutationer är 2-cykler, eller 1-cykler. Antalet lösningar till den givna ekvationen ges alltså av antalet sätt att välja ut ett antal t parvis disjunkta 2-delmängder, för $t \geq 1$ och $2t \leq n$. Eftersom 2-delmängderna är oetiketterade har vi
   SVAR:
   $$\sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2t} \cdot \frac{1}{t!} \binom{2t}{2, 2, \ldots, 2}.$$

   (c) (1p) Låt φ och ψ vara permutationer i $\mathcal{S}_n$ av samma typ. Kommer ekvationerna $x^2 = \varphi$ och $x^2 = \psi$ då alltid att ha lika många lösningar i $\mathcal{S}_n$.

   Lösning: Om φ och ψ är av samma typ är de konjugerade och det finns en permutation τ sådan att
   $$\varphi = \tau\psi\tau^{-1}.$$
   Vidare ser vi att om $x^2 = \psi$ så kommer
   $$(\tau x\tau^{-1})^2 = \tau x\tau^{-1}\tau x\tau^{-1} = \tau x^2\tau^{-1} = \tau\psi\tau^{-1} = \varphi,$$
   dvs $y = \tau x\tau^{-1}$ är en lösning till ekvationen $y^2 = \varphi$. På samma sätt ser man att om y är en lösning till $y^2 = \varphi$ så kommer permutationen $x = \tau^{-1}y\tau$ att vara en lösning till ekvationen $x^2 = \psi$. Relationen
   $$x \qquad \longleftrightarrow \qquad \tau x\tau^{-1},$$
   ger alltså en bijektion mellan mängden av lösningar till ekvationen $x^2 = \psi$ och mängden av lösningar til ekvationen $y^2 = \varphi$, så de bägge ekvationernas lösningsmängder är lika stora.

(d) (2p) Går det att formulera någon generell sats med vars hjälp man ”enkelt” kan avgöra om ekvationen $x^2 = \psi$ är lösbar i $\mathcal{S}_n$ för någon given permutation ψ.

Lösning: Om en cykel av jämn längd kvadreras uppstår två cykler enligt nedan:

$$(a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ \ldots\ a_t\ b_t)(a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ \ldots\ a_t\ b_t) = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_t)(b_1\ b_2\ \ldots\ b_t),$$

och omvänt, enligt formeln ovan, en produkt av två disjunkta cykler av samma längd t är kvadraten av en cykel av längd $2t$. Om en cykel av udda längd t kvadreras så får vi en cykel med samma längd t och varje cykel av udda längd t är kvadraten av en cykel med samma längd t, jämför lösningen av deluppgift (a). Kvadrerar vi en permutation så blir resultatet alltså en permutation bestående av en produkt av disjunkta cykler där för varje jämnt tal $2t$ antalet cykler av längd $2t$ är jämnt.

Vi observerar också att produkten av två lika långa cykler, enligt formeln ovan, är kvadraten av en permutation.

Låt $c_t(\varphi)$ beteckna antalet cykler av längd t i en framställning av φ som en produkt av disjunkta cykler. Våra diskussioner ovan leder till följande

Sats. *En permutation φ är en kvadrat om och endast om $c_{2t}(\varphi)$ är ett jämnt tal för alla värden på talet t.*

10. Låt N_n beteckna mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vi betraktar par (f, g) av funktioner sådana att f är en funktion från N_s till N_t och g är en funktion från N_t till N_u. Låt $I(s, t, u)$ beteckna antalet sådana par med egenskapen att sammansättningen $g \circ f$ är en injektiv funktion från N_s till N_u och låt $S(s, t, u)$ beteckna antalet sådana par med egenskapen att sammansättningen $g \circ f$ är en surjektiv funktion från N_s till N_u

(a) (2p) Härled en formel för $I(s, t, u)$.

Lösning: Låt A beteckna delmängden $\{f(x) \mid x \in N_s\}$ till mängden N_t. Kravet att sammansättningen av f och g är injektiv ger att

$$x \neq x' \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) \neq g(f(x')) \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x').$$

Så vi inser att f måste vara en injektiv funktion samt att restriktionen av g till mängden A också måste vara injektiv. Omvänt gäller att om g:s restriktion till A och f är injektiva funktioner så kommer deras sammansättning också att vara injektiv.

Antalet injektiva funktioner från N_s till A är $s!$, eftersom $|A| = s$ om f är injektiv. Antalet injektiva funktioner från A till N_u är lika med $u \cdot (u-1) \cdot (u-2) \cdot \ldots \cdot (u - |A| + 1)$ och antalet sätt att välja funktionsvärden $g(y)$ där $y \in Z_t \setminus A$ är lika med $u^{t-|A|}$. Eftersom $|A| = s$ får vi enligt multiplikationsprincipen

SVAR:

$$I(s, t, u) = s! \cdot u^{t-s} \cdot \frac{u!}{s!} = u^{t-s} \cdot u!.$$

(b) (2p) Härled en fomel för $S(s, t, u)$.

Lösning: Låt A beteckna samma delmängd som i föregående uppgift. Sammansättningen $g \circ f$ är surjektiv precis då g:s restriktion till A är en surjektiv funktion från A till N_u. Så antalet element i A är minst lika många som antalet element i N_u, dvs u. Varje surjektion går att unikt beskriva med hjälp av följande val:

op 1. Välj delmängd A till N_t: antal möjligheter är $n_1 = \binom{t}{|A|}$,

op 2. Välj surjektion från N_s till A: antal sätt är $n_2 = |A|!S(s, |A|)$.

op 3. Välj surjektion från A till N_u: antalet sätt är $n_3 = u!S(|A|, u)$

op 4. Välj funktionsvärde $f(y)$, för $y \in N_t \setminus A$: antal sätt $n_4 = u^{s-|A|}$.

Multiplikationsprincipen ger nu med $n = |A|$,

SVAR:

$$\sum_{n=u}^{t} \binom{s}{n} \cdot n! \cdot S(s, n) \cdot u! \cdot S(n, u) \cdot u^{s-n}.$$