Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 9 mars 2009 kl 14.00-19.00.

DEL I

1. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

med begynnelsevärdena $a_0 = 2$ och $a_1 = -1$.

LÖSNING: Den karakteristiska ekvationen $r^2 = -r + 6$ har rötterna $r = 2$ och $r = -3$. Rekursionsekvationens allmänna lösning blir då

$$a_n = A2^n + B(-3)^n.$$

Anpassning till begynnelsevärdena ger systemet

$$\begin{array}{rcr} A2^0 + B(-3)^0 & = & 2 \\ A2^1 + B(-3)^1 & = & -1 \end{array}$$

som ju har lösningen $A = 1$ och $B = 1$

SVAR: $a_n = 2^n + (-3)^n$.

2. (3p) Lös i ringen Z_{11} ekvationen $4x + 7 = 6$.

LÖSNING: Eftersom $4 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$ så är $4^{-1} = 3$ i ringen Z_{11}. Således får vi

$$x = 4^{-1} \cdot (6 - 7) = 3 \cdot (-1) = -3 = 8.$$

SVAR: $x = 8$.

3. (3p) På hur många olika sätt kan en klass med nio elever delas in i tre grupper så att eleverna A, B och C hamnar i olika grupper, dvs ingen grupp innehåller både A och B, eller både A och C eller både B och C eller alla tre. Svara med ett heltal (och en väl motiverad lösning.)

LÖSNING: Placera först ut eleverna A, B och C i varsin grupp. För var och en av de återstående 6 eleverna finns nu tre möjligheter, antingen hamnar de i gruppen med A, gruppen med B eller i gruppen med C. Enligt multiplikationsprincipen får vi nu

SVAR: $3^6 = 729$

4. (3p) Låt G vara en ändlig graf med minst tre kanter och som är sådan att alla noder har jämn valens. Förklara varför G måste ha minst en cykel

LÖSNING: Saknades cykler skulle grafen vara ett träd, om den är sammanhängande, eller allmänt vara en skog dvs en samling träd. Men varje träd har noder med valens ett, och grafen saknar noder med valens ett. Alltså kan grafen inte sakna cykler.

5. (3p) Ange lämpliga uttryck för a och b så att

$$\binom{a}{b} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{n-k-1}$$

LÖSNING:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{n-k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{n-k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

SVAR: $a = n+1$ och $b = k+1$.

DEL II

6. Besvara följande frågor och glöm ej att motivera ditt svar.

   (a) (1p) Finns det udda permutationer vars ordning är ett jämnt tal?
   SVAR: Ja t ex $\varphi = (1\ 2)$ som ju har ordning två.

   (b) (1p) Finns det jämna permutationer vars ordning är ett udda tal?
   SVAR: Ja t ex $\psi = (1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$ som är en jämn permutation med ordning 3.

   (c) (1p) Finns det udda permutationer vars ordning är ett udda tal?
   SVAR: NEJ, ty om permutationen τ har en udda ordning måste den, när den skrivs som en produkt av disjunkta cykler, bestå av cykler av udda längd. Detta pga att ordningen av en cykel är lika med cykellängden och ordningen av τ är minsta gemensamma multipeln av längderna av dessa cykler. Men alla cykler av udda längd kan uttryckas som en produkt av ett jämnt antal 2-cykler. Permutationen τ kan alltså uttryckas som en produkt av ett jämnt antal 2-cykler och är då med nödvändighet jämn.

   (d) (1p) Finns det jämna permutationer vars ordning är ett jämnt tal?
   SVAR: Ja, t ex $\gamma = (1\ 2)(3\ 4)$ som är en jämn permutation och har ordning är två.

7. (3p) Två klasser med vardera 12 elever skall utse en kommité bestående av sex elever. På hur många olika sätt kan detta ske om minst två elever från varje klass skall ingå.

   LÖSNING: Kalla klasserna för klass A och klass B. Tre möjliga fall, precis två elever från klass A, eller precis tre elever från klass A eller precis fyra elever från klass A.

   Fall 1 Väljer två elever ur klass A och fyra elever ur klass B, totalt

$$\binom{12}{2}\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

   olika sätt.

   Fall 2 Väljer tre elever ur vardera klassen vilket enligt multipikationsprincipen går på

$$\binom{12}{3}\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

   olika sätt.

   Fall 3 Väljer två elever ur klass B och fyra elever ur klass A, totalt

$$\binom{12}{4}\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

   olika sätt.

Totalt ger de tre olika fallen

SVAR:

$$2 \cdot \binom{12}{2}\binom{12}{4} + \binom{12}{3}\binom{12}{3}$$

olika sätt.

8. (4p) Bestäm och ange på ett lämpligt sätt samtliga hela tal x som satisfierar ekvationerna

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 5 \pmod{11}, \\ 2x+3 &\equiv 5 \pmod{9}, \\ x &\equiv 5 \pmod{7}. \end{aligned}$$

LÖSNING: Den första ekvationen är ekvivalent med att $x \equiv 4 \pmod{11}$ eller $x \equiv -4 \pmod{11}$, och den andra ekvationen med att $x \equiv 1 \pmod{9}$. De x som satisfierar det givna systemet är alltså precis de x som satisfierar minst ett av systemen nedan.

$$\begin{array}{rcll} x &\equiv& 4 & \pmod{11}, \\ x &\equiv& 1 & \pmod{9}, \\ x &\equiv& 5 & \pmod{7}. \end{array} \qquad \text{resp} \qquad \begin{array}{rcll} x &\equiv& 7 & \pmod{11}, \\ x &\equiv& 1 & \pmod{9}, \\ x &\equiv& 5 & \pmod{7}. \end{array}$$

Lösning av det ena systemet ovan:

Ansätter, enligt kinesiska restsatsmetoden,

$$x = A \cdot 7 \cdot 9 + B \cdot 11 \cdot 7 + C \cdot 11 \cdot 9 + n \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7.$$

Räknar modulo 11 och finner då att

$$4 \equiv_{11} x \equiv_{11} A(-4)(-2) \quad \Longleftrightarrow \quad 2A \equiv_{11} 1 \quad \Longleftrightarrow \quad A \equiv_{11} 6.$$

Räknar modulo 9 och finner då att

$$1 \equiv_9 x \equiv B2(-2) \quad \Longleftrightarrow \quad 5B \equiv_9 1 \quad \Longleftrightarrow \quad B \equiv_9 2.$$

Räknar modulo 7 och finner då att

$$5 \equiv_7 x \equiv_7 C4 \cdot 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 8C \equiv_7 5 \quad \Longleftrightarrow \quad C \equiv_7 5.$$

Systemets lösning blir då

$$x = 6 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 11 \cdot 7 + 5 \cdot 11 \cdot 9 + n \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7.$$

Lösning av det andra systemet:

Ansätter

$$x = A \cdot 7 \cdot 9 + B \cdot 11 \cdot 7 + C \cdot 11 \cdot 9 + n \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7.$$

Räknar modulo 11 och finner då att

$$-4 \equiv_{11} x \equiv_{11} A(-4)(-2) \quad \Longleftrightarrow \quad 2A \equiv_{11} -1 \quad \Longleftrightarrow \quad A \equiv_{11} 5.$$

Räknar modulo 9 och finner då att

$$1 \equiv_9 x \equiv B2(-2) \quad \Longleftrightarrow \quad 5B \equiv_9 1 \quad \Longleftrightarrow \quad B \equiv_9 2.$$

Räknar modulo 7 och finner då att

$$5 \equiv_7 x \equiv_7 C4 \cdot 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 8C \equiv_7 5 \quad \Longleftrightarrow \quad C \equiv_7 5.$$

Systemets lösning blir då

$$x = 5 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 11 \cdot 7 + 5 \cdot 11 \cdot 9 + n \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7.$$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt G vara en k-regulär bipartit graf G med nodmängderna X och Y, och alltså i vilken samtliga kanter har sina ena ändpunkt i en nod i X och sin andra ändpunkten i en nod i Y.

   (a) (1p) Visa att antalet noder i X är lika med antalet noder i Y.
   LÖSNING: Låt e beteckna antalet kanter i grafen. Om X har x noder så går från nodmängden X totalt $x \cdot k = e$ kanter och till noderna i Y kommer totalt $e = k \cdot y$ kanter där y är antal noder i Y. Således har vi
   $$x \cdot k = e = k \cdot y,$$
   varur $x = y$ följer.

   (b) (1p) Motivera, t ex genom att hänvisa till en lämplig sats varför det, under förutsättningen att $k = 2$, alltid finns en (”äkta”) kantfärgläggning (”edge-colouring” i läroboken) i två färger till grafen G.
   LÖSNING: En sats i läroboken säger att om en bipartit graf har maxvalens v så finns en kantfärgläggning med v färger. Den givna maxvalensen var 2.

   (c) (3p) Visa, t ex genom att använda lämpliga satser i kursboken eller på något annat sätt, att om p är ett positivt heltal mindre än k så finns en färgläggning av kanterna i G, i färgerna svart och vitt, sådan att vid varje nod inträffar precis p vita kanter och $k - p$ svarta kanter.
   LÖSNING: Eftersom maxvalensen är k har, enligt den ovan nämnda satsen, grafen en kantfärgläggning i k färger, och kanterna kan färgas i de p vita färgerna $V_1, V_2, \ldots, V_p$ och de $k - p$ svarta färgerna $S_1, S_2, \ldots S_{k-p}$, så att vid varje nod inga kanter med samma färg uppträder. Vid varje nod inträffar precis k kanter och med samtliga de k ”olika” ”färgerna”, dvs p kanter med vita färger och $k - p$ kanter med svarta färger. Vi avslutar nu lösningen av uppgiften med att betrakata alla nyanser av vitt som en och samma vita färg och motsvarande för de svarta nyanserna.

10. Låt $\mathrm{sgd}(a, b)$ beteckna den största gemensamma delaren till talen a och b och låt $\mathrm{mgm}(a, b)$ beteckna den minsta gemensamma multipeln till a och b.

    (a) (1p) Visa att för alla tal a och b så gäller att $\mathrm{sgd}(a, b)$ delar $\mathrm{mgm}(a, b)$.
    LÖSNING: Vet att $\mathrm{sgd}(a, b)$ delar a dvs finns heltal k sådant att
    $$a = k \cdot \mathrm{sgd}(a, b).$$
    Vet att a delar $\mathrm{mgm}(a, b)$, dvs det finns ett heltal k' sådant att
    $$\mathrm{mgm}(a, b) = k' \cdot a.$$
    Tillsammans ger dessa likheter att
    $$\mathrm{mgm}(a, b) = k' \cdot k \cdot \mathrm{sgd}(a, b),$$
    och påståendet är verifierat.

    (b) (1p) Hur många olika mängder $\{x, y\}$, där x och y är positiva hela tal, finns det sådana att
    $$\mathrm{sgd}(x, y) = 60 \qquad \text{och} \qquad \mathrm{mgm}(x, y) = 840.$$
    LÖSNING: Vi finner att
    $$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad \text{och} \qquad 840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Vidare är det klart att om

$$x = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} \qquad \text{och} \qquad y = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k},$$

där $p_1, p_2, \dots p_k$ är k olika primtal och där $e_i \geq 0$ liksom $f_i \geq 0$ för $i = 1, 2, \dots, k$, så är

$$\operatorname{sgd}(x, y) = p_1^{\min(e_1,f_1)} p_2^{\min(e_2,f_2)} \dots p_k^{\min(e_k,f_k)}$$

och

$$\operatorname{mgm}(x, y) = p_1^{\max(e_1,f_1)} p_2^{\max(e_2,f_2)} \dots p_k^{\max(e_k,f_k)}$$

Med de givna talen är $k = 4$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ och $p_4 = 7$ samt

$$\{e_1, f_1\} = \{2, 3\}, \quad \{e_2, f_2\} = \{1\}, \quad \{e_3, f_3\} = \{1\}, \quad \{e_4, f_4\} = \{0, 1\}.$$

Detta ger fyra möjliga par (x, y):

$$\begin{cases} x &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^1 &= 840, \\ y &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 &= 60. \end{cases} \quad \begin{cases} x &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 &= 120, \\ y &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^1 &= 420. \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} x &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^1 &= 420, \\ y &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 &= 120. \end{cases} \quad \begin{cases} x &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 &= 60, \\ y &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^1 &= 840. \end{cases}$$

Eftersom $x \neq y$, ty annars vore $\operatorname{sgd}(x, y) = \operatorname{mgm}(x, y)$, ger varje sökt mängd upphov till två par (x, y), som synes tydligt ovan. Alltså

SVAR: Två olika mängder ($\{120, 420\}$ och $\{60, 840\}$).

(c) (3p) Formulera och bevisa en lämplig sats som generaliserar en korrekt lösning av föregående uppgift.

LÖSNING:

Sats. Låt n och m vara två givna positiva olika hela tal sådana att n delar m. Då gäller att antalet mängder $\{x, y\}$ sådana att $\operatorname{sgd}(x, y) = n$ och $\operatorname{mgm}(x, y) = m$ är lika med $2^{\kappa-1}$, där κ är antalet olika primtal som delar kvoten m/n .

Bevis. Vi använder beteckningar från lösningen av uppgift 10 (b). Antag att

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \qquad \text{och} \qquad m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k},$$

där vi alltså kan antaga att $b_i \geq a_i \geq 0$ för $i = 1, 2, \dots, k$. Det gäller då att $n = \operatorname{sgd}(x, y)$ och $m = \operatorname{mgm}(x, y)$ precis då

$$\{e_i, f_i\} = \{a_i, b_i\} \qquad \text{för} \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

För alla i sådana att $a_i \neq b_i$, dvs $a_i < b_i$, finns två möjliga val av e_i, antingen att $e_i = a_i$ eller $e_i = b_i$. När x sålunda valts är y given. Antal i sådana att $a_i < b_i$ är lika med antalet κ av primtal som delar kvoten m/n. Totalt finns, enligt multiplikationsprincipen, alltså 2^κ olika par (x, y) som uppfyller att $n = \operatorname{sgd}(x, y)$ och $m = \operatorname{mgm}(x, y)$. Eftersom $m \neq n$ så måste $x \neq y$ och då ger varje mängd $\{x, y\}$ upphov till två ordnade par. Antalet olika mängder $\{x, y\}$ som uppfyller givna villkoren är alltså lika med $2^\kappa/2$, vilket vi skulle visa.