Varje abelsk grupp G med sex element är cyklisk

En grupp G med sex element är cyklisk precis då den har ett element vars ordning är sex. Antag att G saknar sådana element. Identiteten har alltid ordning ett och samtliga övriga element i G kommer då, enligt en av följdsatserna till Lagranges sats, att ha ordning två eller tre. Vi visar att G måste ha både element av ordning tre och av ordning två.

Antag alla element utom identiteten har ordning två. Låt a och b vara två sådana element. Vi betraktar nu mängden $H = \{e, a, b, ab\}$ och skriver upp en multiplikationstabell för elementen i H och får då till exempel att

$$a \circ ab = a^2 \circ b = e \circ b = b \qquad \text{och} \quad ab \circ ab = aa \circ bb = e \circ e = e,$$

och generellt att

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Vi ser att mängden H är sluten m a p operationen $\circ$, att identitetselementet e finns med i H, och att alla element har sin invers i H. Associtiva lagen gäller generellt vid multiplikation av element i G och därför också speciellt vid multiplikation av element i H.

Hur som helst om alla element utom identiteten skulle ha ordning två så skulle G alltså ha en delgrupp H med fyra element, vilket ju inte är möjligt enligt Lagranges sats. Alltså kan inte samtliga element i G ha ordning två eller mindre.

Antag nu att samtliga element i G, förutom identiteten, har ordning tre. Vi inser kanske att om elementet a inte har ordning två så kommer

$$a \circ a \neq e \qquad \Longrightarrow \qquad a^{-1} \neq a.$$

Mängden $G \setminus \{e\}$ skulle då kunna delas in i disjunkta par $\{x, x^{-1}\}$ av element som är varandras inverser (eftersom också $x = (x^{-1})^{-1}$),

$$G \setminus \{e\} = \{a, a^{-1}\} \cup \{b, b^{-1}\} \cup \ldots .$$

Men $G \setminus \{e\}$ består av fem element så detta är inte möjligt eftersom talet två inte delar talet fem.

Nu vet vi att i G finns minst ett element a vars ordning är två och minst ett element b vars ordning är tre. Betraktar nu elemenetet $g = ab$ och undersöker detta elements ordning. Vi finner att

$$g^2 = a^2b^2 = eb^2 = b^2 \neq e \qquad \text{samt} \qquad g^3 = a^3b^3 = a^2ab^3 = eae = a \neq e.$$

Elementet g har då varken ordning två eller tre, men vi vet att ordningen av g delar talet sex. Enda möjligheten är att g har ordning sex.

Vi har nu visat att varje abelsk grupp med sex element har minst ett element g av ordning sex. Gruppen G måste alltså vara cyklisk och genereras av elementet g, dvs

$$G =< g >= \{g, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6 = e\}.$$