Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar inför lappskrivning nummer 1 till kursen Diskret matematik för D2 och F, vt09.

1. Rita först cykeln C_{13} i vilken de 13 noderna finns med. Den cykeln kommer att utgöra Hamiltoncykeln i grafen. Rita sedan ut ytterligare fyra kanter så att det uppstår noder med en udda valens. Då kommer det inte att finnas någon Eulerkrets.

2. Noden med valens n är granne med alla andra noder i grafen och måste därför få en egen färg. Cykeln C_n är, om n är ett jämnt tal, 2-färgbar, varannan nod färgen a varannan nod färgen b. Om n är ett udda tal behövs minst tre färger till noderna på cykeln.

   Svar: Om n udda fyra färger annars tre färger.

3. Summan av nodernas valenser är
$$9 \cdot 1 + 37 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 142,$$
   och summan av nodernas valenser är alltid dubbelt så stor som antalet kanter. Antalet kanter är således 71. Men antalet noder är $9 + 37 + 13 + 5 = 64$ och varje träd med 64 noder har 63 kanter.

4. Känt är att en sammanhängande graf har en Eulerkrets precis då alla noder har en jämn valens. Samtliga noder i K_{14} har 13 grannar och därmed valensen 13. Minst en kant från varje nod måste således tas bort. Låt noderna bilda sju olika par och ta bort kanten mellan noderna i varje par. Fortfarande är grafen sammanhängande men nu har alla noder jämn valens.

   SVAR: Minst sju kanter måste tas bort.

5. Ett träd har inga cykler och därför inga cykler av udda längd och varje graf som saknar cykler av udda längd är bipartit enligt känd sats.

6. Vi delar in de sju noderna i K_7 i två delmängder X oh Y och vi tillåter inga kanter mellan noderna i X och inga kanter mellan noderna i Y. Så vi måste ta bort de kanter i K_7 som går mellan noderna i X och de kanter som går mellan noderna i Y.

   Om X innehåller x noder kommer Y att innehålla $7 - x$ stycken noder och antalet kanter som skall tas bort blir då minst
$$(x-1) + (x-2) + ... + 1 = \binom{x}{2}$$
   som är antalet kanterna i K_7 mellan noderna i X och
$$(7-x-1) + (7-x-2) + ... + 1 = \binom{7-x}{2}$$
   mellan noderna i Y. Totala antalet kanter som måste tas bort är då minst
$$f(x) = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{(7-x)(7-x+1)}{2}.$$

Minimerar vi denna funktion t ex med hjälp av derivata ser vi att minimum inträffar när $x = 3.5$. Eftersom x är ett heltal har vi i vårt fall har vi ett minimum när $x = 4$ (eller $x = 3$). Antalet kanter att ta bort blir då

$$\binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 6 + 3 = 9.$$

7. Visar först att grafen är sammanhängande. En av noderna har valens 6 och den noden och dess sex grannar tillhör samma komponent eftersom det finns en stig mellan varje par av dessa noder. Återstår två noder. Om dessa två noder inte tillhör samma komponent som de övriga sju så kommer dessa noder båda antingen ha valens ett, om de har en kant mellan sig, eller valens noll, om de ej är förbundna med en kant. Dock inträffar ej detta fall emedan ingen av noderna har valens ett eller noll. Alltså är alla kanter förbundna med varandra med en stig och grafen är sammanhängande.

   För att bestämma antalet områden behöver vi veta antalet kanter. Det gäller allmänt att valenssumman är två gånger antalet kanter. Vi finner då att antalet kanter e är lika med

$$2e = 4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 6 + 3 + 2 + 4 = 32 \quad \Longrightarrow \quad e = 16.$$

   Använder vi Eulers polyederformel $v + r = e + 1 + c$, där c betecknar antalet komponenter, får vi

$$r = e + 2 - v = 16 + 2 - 9 = 9.$$

8. Låt v, e och r beteckna antalet noder, antalet kanter respektive antalet områden.

   Om varje nod har en valens av minst 4 så kommer valenssumman att vara minst lika med $4v$ och således gäller att

$$2e \geq 4v \quad \text{dvs} \quad v \leq \frac{1}{2}\, e.$$

   Varje kant gränsar till precis två områden och, eftersom varje cykel har en längd av minst 7, så gäller att

$$7r \leq 2e \qquad \text{dvs} \qquad r \leq \frac{2}{7}\, e.$$

   (För att inse detta faktum betrakta en $e \times r$ matris

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{e1} & a_{e2} & \cdots & a_{er} \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kanten } e_i \text{ gränsar till området } r_j \\ 0 & \text{annars} \end{cases} .$$

   Radsummorna blir precis två och kolonnsummorna minst sju. Totalka antalet ettor i matrisen är då dels $2e$ och dels minst $7r$.)

   Låt c beteckna antalet komponenter i grafen. Eulers formel ger nu att

$$e = v + r - c - 1 \leq \frac{1}{2}\, e + \frac{2}{7}\, e - c - 1,$$

dvs

$$5e \leq 14(-c-1),$$

vilket ju är orimligt.

9. Nej, matchningen är inte maximal. Ersätt relationen Ac med relationerna Bc och Aa. Denna operation ger en större matchning.

10. Allmänt gäller att eftersom grafen G är sammanhängande har den ett spännade träd T med samma nodmängd som G men med $n-1$ kanter. Låt kanten e mellan noderna v och u utgör skillnaden mellan G och T.

    (a) Rita T plant, dvs så att inga kanter skär varandra, vilket är möjligt eftersom träd är planära grafer. Rita till en nod x utanför grafen och en kant från v till x. Trädet har vuxit och kanten mellan v och x skär ingen annan kant. Likaledes om vi istället tillför en kant mellan u och x. Sudda nu ut noden x och låt kanten mellan u och v vara det som blir kvar när x suddats ut (men inte kanterna till x). Det vi då ser är en plan ritning av grafen G.

    SVAR: Ja, G kommer att vara planär.

    (b) En av n stycken kanter skall tas bort för att det som blir kvar skall vara ett spännande träd. Så maximalt finns n olika möjligheter att skapa spännande träd till G. Dessutom måste den kant vi tar bort tillhöra en cykel i grafen, annars uppstår två komponenter när kanten tas bort. Tar vi bort en kant i en cykel, vilken som helst, faller aldrig heller grafen sönder i två komponenter.

    Om G är cykelgrafen C_n så finns n möjligheter att ta bort en kant och som då leder till n stycken olika (men isomorfa) spännande träd.

    Eftersom vi utesluter multipla kanter är den minsta cykellängden tre. Minst tre olika spännande träd kan vi alltså alltid skapa.