Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar inför lappskrivning nummer 5, Diskret matematik för D2 och F, vt09.

1. Betrakat gruppen $G = (Z_{19} \setminus \{0\}, \cdot)$.
   (a) Visa att G är en cyklisk grupp.
   (b) Bestäm antalet generatorer till G.
   (c) Bestäm delgrupper med 2, 3, 6 och 9 element till G.
2. Bestäm antalet delgrupper till en cyklisk grupp med 63 element.
3. Vilka av följande grupper är cykliska?
   (a) $(Z_2, +) \times (Z_3, +)$.
   (b) $(Z_8, +) \times (Z_9, +)$.
   (c) $(Z_8, +) \times (Z_3, +) \times (Z_3, +)$.
4. Hörnen i en kvadrat färgas svarta eller vita. Kvadraten kan sedan speglas, vridas och vändas.
   (a) Bestäm en bana med precis två element, och en bana med precis fyra element.
   (b) Bestäm satibilisatorn till en färgläggning där två närliggande hörn är vita och de övriga två svarta.
   (c) Använd den sk Burnsides lemma för att beräkna antalet banor.
5. Bestäm antalet sätt att färga sidorna i en kub med 7 olika färger.
6. Undersök om polynomet $x^3 + x + 1$ är irreducibelt i polynomringen $Z_5[x]$.
7. Undersök om polynomet $p(x) = x^4 + x^2 + 1$ är irreducibelt i polynomringen $Z_5[x]$.
8. Betrakta polynomringen $Z_2[x]$ och bestäm den största gemensamma delaren $D(x)$ till de bägge polynomen $p(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ och $q(x) = x^2 + 1$ samt bestäm polynom $n(x)$ och $m(x)$ sådana att
$$D(x) = n(x)p(x) + m(x)q(x).$$
9. Faktorisera polynomet $x^6 - 1$ i irreducibla faktorer i polynomringen
   (a) $Z_7[x]$.
   (b) $Z_5[x]$.
   (c) $Z_3[x]$.
   (d) $Q[x]$.
   (e) $R[x]$.
   (f) $C[x]$,

   där Q betecknar kroppen av rationella tal, R kroppen av reellla tal och C de komplexa talen.
10. Visa att mängden
$$Z[\sqrt{2}] = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in Z\},$$
där Z betecknar mängden av hela tal, bildar en ring.

11. Gruppen G är cyklisk och har en cyklisk delgrupp H med 105 element och en cyklisk delgrupp K med 63 element. Bestäm $H \cap K$.

12. Betrakta en grupp G som verkar på en mängd S. Banan $\mathcal{O}$ innehåller 7 element ur S och stabilisatorn till elementet $s \in \mathcal{O}$ består av 4 element. Bestäm antalet element i G.

13. Låt H vara en delgrupp till gruppen G. Elementen i H beskriver funktioner på elementen i G enligt
$$h(g) = h \cdot g.$$
   (a) Bestäm antalet banor i G.
   (b) Beskriv banorna.

14. Undersök om mängden av 3×3 matriser
$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
där $a, b, c \in Z_5$, bildar en ring utan etta.

15. Bestäm samtliga enheter i ringen $R = M_{2\times 2}(Z_2)$ av 2×2-matriser med element från kroppen Z_2.

16. Betrakta ringen $R = M_{3\times 3}(Z_3)$ av 3×3-matriser med element från kroppen Z_3. Visa att om $A \in R$ och $\det(A) = 0$ så finns alltid en matris B sådan att $AB = 0$. Kommer det då också att finnas en matris C så att $CA = 0$?

17. Polynomet $p(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$ har nollställena 1, -1, 2, -2 och 3 i ringen Z. Faktorisera $p(x)$ i irreducibla faktorer i ringen $Z_{17}[x]$.

18. Konstruera ett irreducibelt fjärdegradspolynom i polynomringen $Z_3[x]$.

19. Bestäm antalet enheter i ringen $R = M_{2\times 2}(Z_p)$ av 2×2-matriser med element från kroppen Z_p, där p är ett primtal.

20. Undersök om mängden
$$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\},$$
där Q betecknar mängden av rationella tal, bildar en kropp.