SF1633 Differentialekvationer I.
MODULUPPGIFTER 3.
Fourierserier och partiella differentialekvationer..

1. Undersök om funktionsföljden $\{1,\ \cos mt,\ \sin nt\}$ där $m = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$ och $n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$ är ortogonal på intervallet $(-\pi,\pi)$. Uttryck därefter den 2π-periodiska funktionen f med hjälp av denna funktionsföljd då $f(t) = t,\ -\pi < t < \pi$.

2.
a) Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1,\ 2,\ 3$, utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,\pi]$.
b) Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0,\pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.
c) Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie.
Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.

3. För den 2π-periodiska funktionen f gäller att: $f(t) = \pi^2 - t^2$, $-\pi < t < \pi$.
Bestäm f:s fourierserie.
Använd sedan den erhållna serien för att beräkna summorna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

4. Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen $f(x) = |x| + x$, $-1 < x < 1$.
Bestäm vidare Fourierseriens värde för $x = 1$.

5. I ett tabellverk hittar man att $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$ är lika med $\frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2)$, då $0 < x < 1$.
Beräkna $s(-8/3)$.

6. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,\ldots.$ så att $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

7. Bestäm allmänna lösning till differentialekvationen $y'' + 5y = f(x)$,
där $f(x + 2\pi) = f(x)$ och $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$.

8. Den vertikala förflyttningen $u(x,t)$ för en oändligt lång sträng beskrivs av begynnelse-
värdesproblemet:
$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} , & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) , & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}.$$
a) Genomför transformationen av vågekvationen med hjälp av substitutionen $\begin{cases} z = x + at \\ v = x - at \end{cases}$.
b) Härled lösningen till den i a) erhållna differentialekvationen.
c) Härled lösningen till begynnelsevärdesproblemet.
d) Tolka det resultat som erhålles då begynnelsehastigheten $g(x) = 0$.

9. För en vibrerande sträng med ett luftmotstånd som är proportionellt mot hastigheten är randvärdesproblemet:
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2hu_t \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}, \quad \text{där } 0 < h < \frac{\pi a}{L}.$$
Bestäm utslaget $u(x,t)$. Vilken inverkan har luftmotståndet på strängens rörelse?

10. Lös den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i området $0 < x < \pi,\ t > 0$ med randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = \sin 2x + 4\sin 4x$ och $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$.

11. Lös följande variant av värmeledningsproblemet:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{2}(1 + 3\cos x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

12. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \sin x + 10\sin 3x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

13. Bestäm genom variabelseparation den lösning till den partiella differentialekvationen $u'_x = u'_y + u$ som uppfyller villkoret $u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$.

14. En sträng är inspänd på x-axeln så att den har sina ändar i $x = 0$ och $x = 1$. Vid tiden $t = 0$ befinner den sig i vila men utsätts för ett hammarslag som ger den en begynnelsehastighet av $g(x) = \begin{cases} h, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$.
Bestäm förflyttningen $u(x,t)$ då vågekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ satisfieras.

15. Låt $u(x,y)$ beteckna den stationära temperaturfördelningen i en tunn kvadratisk platta $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$, (u uppfyller alltså Laplaces´ ekvation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$) med randvillkoren $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0$, $u(x,0) = 0$ och $u(x,1) = \cos 4\pi x$.
Bestäm temperaturen i mittpunkten $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

16. Värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(0,t) = 0 \quad , u(1,t) = 10 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$
kan lösas genom att man sätter $v(x,t) = u(x,t) - 10x$.

a. Visa att $v(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ v(0,t) = 0 \quad , v(1,\ t) = 0 \\ v(x,\ 0) = -10x \end{cases} .$$

b. Lös P.D.E.-problemet för v och bestäm sedan u .

SVAR:

1. $\langle 1,\ \cos mt\rangle = 0$ $\langle 1,\ \sin nt\rangle = 0$ $\langle \cos mt,\ \sin nt\rangle = 0$ $\langle \cos mt,\ \cos nt\rangle = 0$

$\langle \sin mt,\ \sin nt\rangle = 0$ $\quad t \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$

2. a) $\langle \sin nx, \sin mx\rangle = 0$ b) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ c) Fourierserien: $\frac{0^2+1+3^2+1}{2} = \frac{11}{2}$,

cosinusserien: $\frac{0^2+1+0^2+1}{2} = 1$, sinusserien: $\frac{0^2+1-(0^2+1)}{2} = 0$.

3. $f(t) \sim \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

4. $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x + 2\frac{-\cos n\pi}{n\pi}\sin n\pi x \right\}$

Fourierseriens summa för $x = 1$ blir medelvärdet $\frac{f(1+)+f(1-)}{2} = \frac{0+2\ 1}{2} = 1$.

5. $s(-8/3) = -\frac{\pi^2}{18}$

6. $b_n = 0$, n jämnt och $b_n = \frac{4n}{\pi(n^2-4)}$, n udda

7. $y = y_h + y_p = A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2-5)}\sin nx$

8. a) Den transformerade differentialekvationen blir: $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$.

b) Den transformerade differentialekvationen har lösningen: $u = F(z) + G(v)$ vilken i de gamla koordinaterna ges av $u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$.

c) Begynnelsevärdesproblemet har lösningen: $u(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(x)\,dx$.

d) Då begynnelsehastigheten $g(x) = 0$ består lösningen av en superposition av två stående vågor.

9. Utslaget ges av $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ht} \sqrt{\omega^2 + h^2} \sin(\alpha + \omega t) \sin \frac{n\pi x}{L}$

där $a_n = \frac{2}{\omega L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$, $\tan\alpha = \frac{\omega}{h}$ och $\omega = \sqrt{\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 - h^2}$.

Luftmotståndet på strängens rörelse ger upphov till följande effekter:
Exponentiellt dämpad amplitud, avtagande frekvens ω och en fasförskjutning α .

10. $u(x,t) = \cos 4t \sin 2x + 4 \cos 8t \sin 4x$

11. $u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-t} \cos x$

12. $u(x,t) = \sin x \, e^{-t} + 10 \sin 3x \, e^{-9t}$

13. $u(x,0) = 3e^{-5x-6y} + 2e^{-3x-4y}$

14. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{(n\pi)^2} (\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4}) \sin n\pi x \sin n\pi t$

15. $u(x,y) = \frac{e^{4\pi y} - e^{4\pi y}}{e^{4\pi} - e^{4\pi}} \cos 4\pi x$ $\quad u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}$

16. $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{20}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$ $\quad u(x,t) = v(x,t) + 10x$